Théorie des jeux

M. BEZOUI
mbezoui@umbb.dz

November 15, 2014

(Séance $N01$)


Que la stratégie soit belle est un fait, mais n'oubliez pas de regarder le résultat.
Winston Churchill

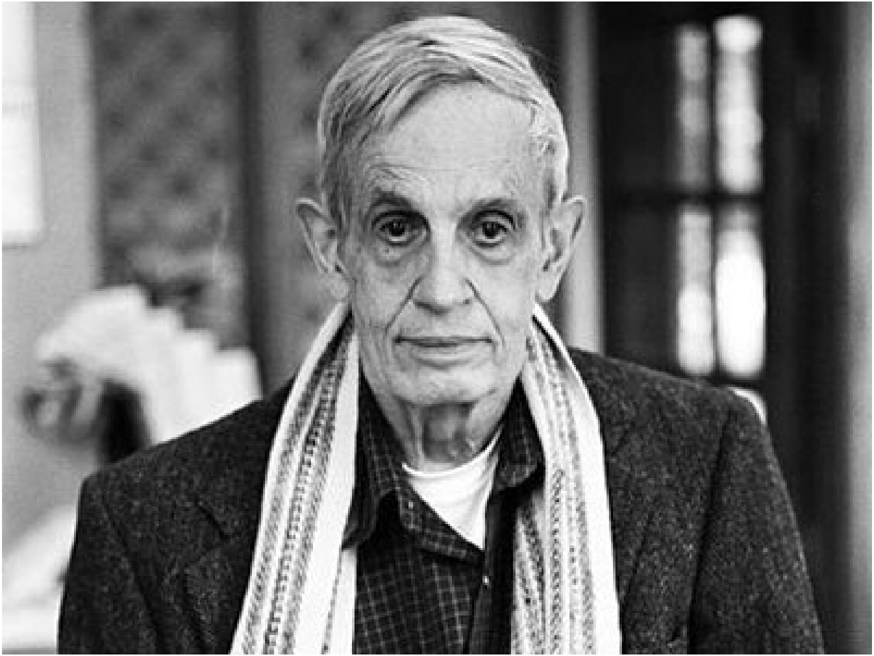
Introduction

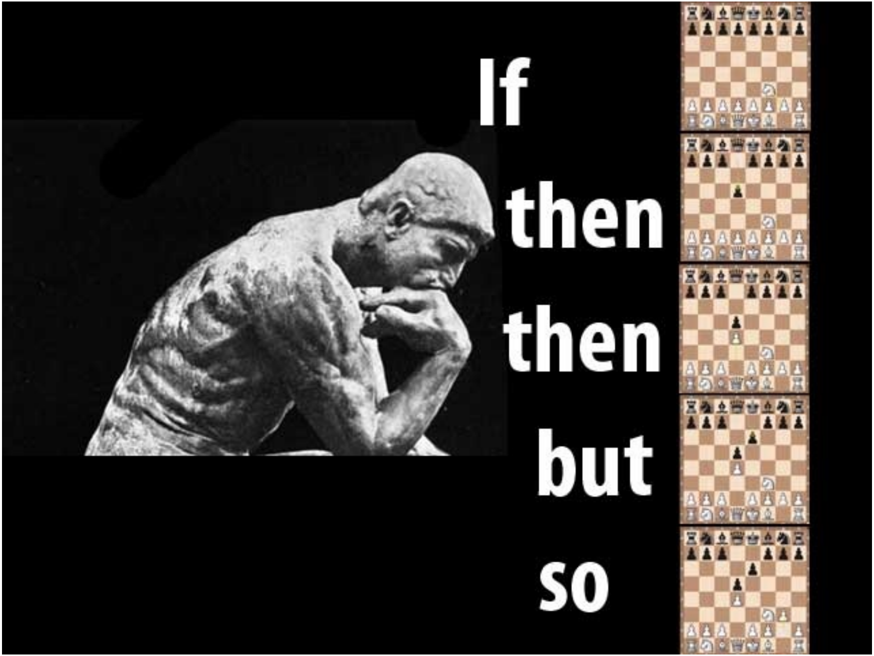

Game
Theory
strategy
one
player
decision
extensive
strategies
possible
equilibrium
form
situation
bimatrix
set
outcome
Payout
Information
option
opponent
following
payoff
always
moves
action
dominant
players
actions
one's
strategic
nodes
Normal
matrix
may
best
Equilibria
representation
dotted
know
indistinguishable
consider
might
Nash
CP
Outcomes
circles
point
case
opponents
player's
complete
problem
example
two
another
analyze
without
optimal
structure
decisions
factors
likely
sets
chance
critical
Identify
responses
costs
options
first
find
good
rival
RP
dominated
Games
choices
evaluating
Framework
arise
tree
better
many
connected
number
representing
plays
problems
others
considering
observation
different
take
rows
useful
words
diagram
company
based
become
difficult
regardless
column
makes
call
eliminated
model
dots
increase
making

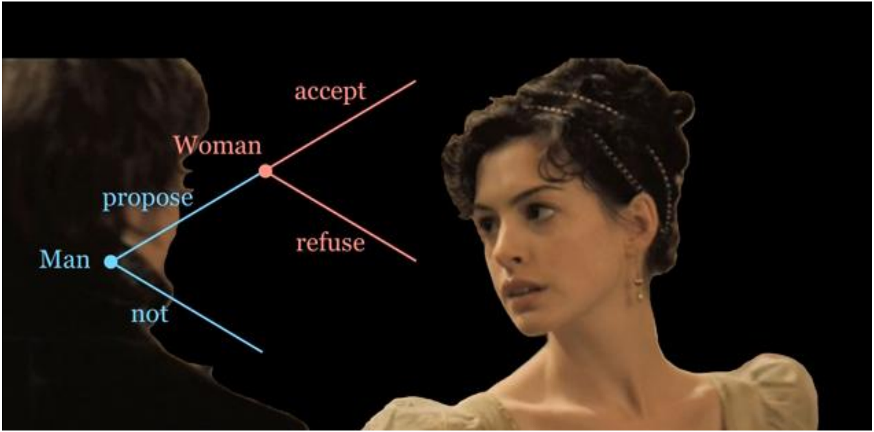
Game Theory

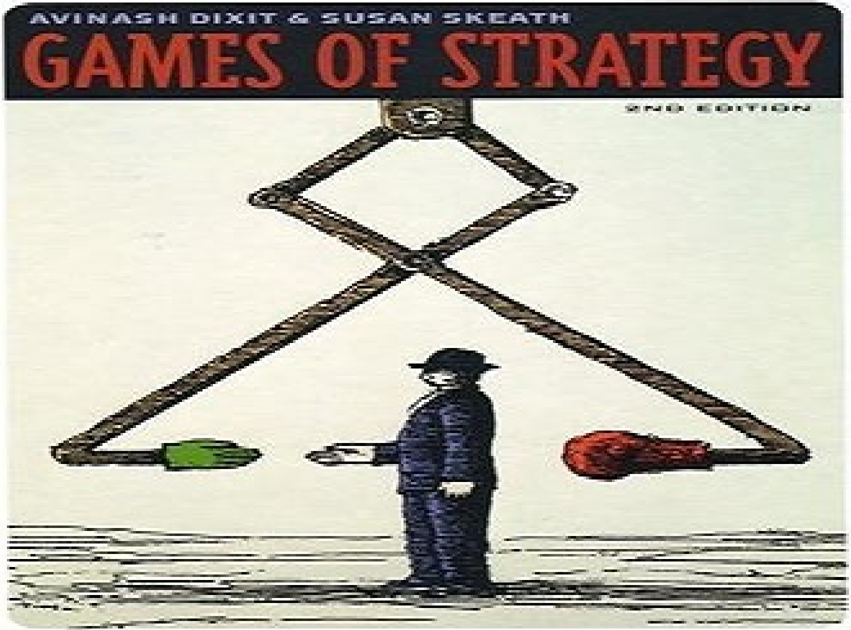
Game Theory and Strategic Behavior


RUSSELL
CROWE
RON HOWARD
A BEAUTIFUL
MIND




If
then
then
but
so

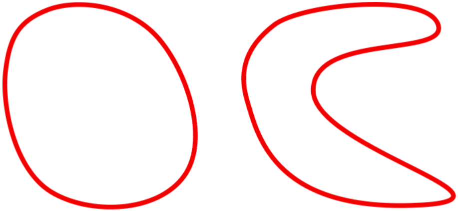

accept
Woman
propose
refuse
Man
not


AVINASH DIXIT & SUSAN SKEATH
GAMES OF STRATEGY
2ND EDITION

Rappel Mathématique

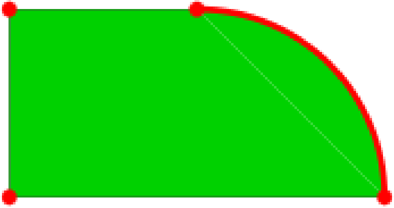
Definition

Soit K un sous ensemble d'un espace vectoriel réel E. K est convexe si $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0,1], \lambda x + (1-\lambda) y \in K$. *Autrement dit, toute combinaison convexe d'éléments de K est dans K. i.e.* $\forall x_i \in K, \forall \lambda_i \geq 0, i = \overline{1,n}$ *avec* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ *alors* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in K$.



Definition

Soit K un sous ensemble d'un espace vectoriel réel E. Un vecteur $x \in K$ est un point extrême de K si on ne peut pas l'exprimer comme combinaison convexe de deux autres points de K. i.e. On ne peut pas trouver deux vecteurs de K, y, z, différents de x et $\lambda \in [0, 1]$ tels que $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$.



Definition

Soit une fonction $f : K \to \Re$, K une partie convexe de $\Re$. On dit que f est:

Convexe si $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

concave si $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

Quasi Convexe si $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max(f(x), f(y))$.

Quasi concave si $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(f(x), f(y))$.

1. f est concave si et seulement si $(-f)$ est convexe.
2. f est concave (resp. convexe), alors f est quasi concave (resp. Quasi convexe).
3. f est quasi concave si et seulement si pour tout $\alpha \in \Re$ l'ensemble $\{x \in K, f(x) \geq \alpha\}$ est convexe.

Definition

Soient E un espace métrique, $f : E \to \Re$, et $B(x_0, \eta)$ la boule de centre x_0 et de rayon η avec $x_0 \in E$.
f est semi continue supérieurement (scs) en x_0 si $\forall \lambda \geq f(x_0), \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in B(x_0, \eta) \Rightarrow \lambda \geq f(x)$.

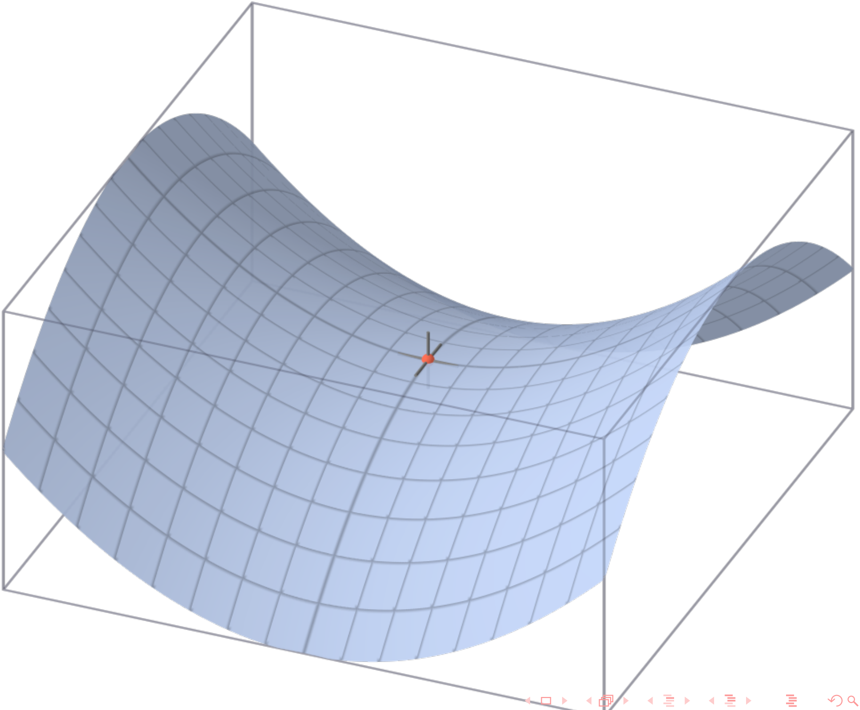
1. f est semi continue inférieurement (sci) en x_0
2. f est scs (resp. sci) sur E si elle l'est en tout point de E.
3. f est continue si elle est à la fois scs et sci.
4. f est scs si et seulement si pour tout $\alpha \in \Re$, l'ensemble $\{x \in K, f(x) \geq \alpha\}$ est fermé.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un ensemble X, supposons que $\sup_{x \in X} f(x)$ et $\inf_{x \in X} f(x)$ existent. Alors:

1. $\inf_{x \in X} -f(x) = -\sup_{x \in X} f(x)$
2. $\sup_{x \in X} -f(x) = -\inf_{x \in X} f(x)$

Point selle d'une fonction



Definition

Soient X, Y *deux ensembles et* f *une fonction définie sur* $X \times Y$ *à valeur dans* $\Re$*. On appelle point selle de la fonction f tout couple*

$$(x, y^0) \leq f(x^0, y^0) \leq f(x^0, y), \forall (x, y) \in X \times Y$$

Exemple

1. $f(x,y) = (y-1)^2 - (x-1)^2$ *admet le point* $(1,1)$ *comme point selle.*
2. $f(x,y) = (x-y)^2$ *n'admet pas de point selle.*

Théorème

Soient X, Y *deux ensembles et* f *une fonction définie sur* $X \times Y$ *à valeur dans* $\Re$. *Supposons que* $\sup\limits_{x\in X} \inf\limits_{y\in Y} f(x,y)$ *et* $\inf\limits_{y\in Y} \sup\limits_{x\in X} f(x,y)$ *existent alors:*

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} f(x,y) \leq \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} f(x,y)$$

Théorème

Soient X, Y *deux ensembles et* f *une fonction définie sur* $X \times Y$ *à valeur dans* $\Re$*. Supposons que* $\sup_{x \in X} \inf y \in Y f(x,y)$ *et* $\inf y \in Y \sup_{x \in X} f(x,y)$ *existent alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. (x^0, y^0) *un point selle de* f*.*
2. $\sup_{x \in X} \inf y \in Y f(x,y) = f(x^0, y^0) = \inf y \in Y \sup_{x \in X} f(x,y)$

Théorème

Le théorème d'existence du point selle (Von-Neuman). Soient X *et* Y *deux sous ensembles non vides d'un espace de Banach et une fonction* $f : X \times Y \to \Re$*. Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées:*

1. X *et* Y *sont non vides, convexes et compacts.*
2. $\forall y \in Y$*, la fonction:* $x \mapsto f(x,y)$ *est scs et concave.*
3. $\forall x \in X$*, la fonction:* $y \mapsto f(x,y)$ *est sci et convexe.*

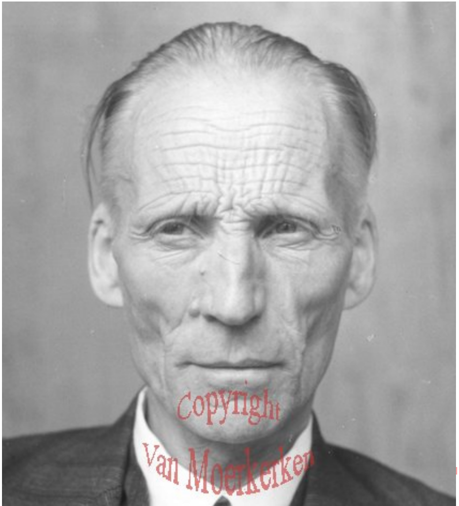
Alors la fonction f *admet au moins un point selle.*

Théorèmes de point fixe

1. On appelle application univoque définie d'un ensemble X dans un ensemble Y, toute application f qui associe à tout élément x de X un et un seule élément y de Y.
2. On appelle point fixe d'une application univoque $f : X \to X$, le point vérifiant $x = f(x)$.
3. On appelle application multivoque (ou correspondance C) définie d'un ensemble X dans un ensemble Y, toute application qui associe à tout élément $x \in X$, un sous ensemble non vide S de Y. On écrit $C(.) : X \to 2^{Y2}$.
4. On dit que $x \in X$ est un point fixe de la correspondance $C(.) : X \to 2^X$ si $x \in C(x)$.
5. On appelle graphe de la correspondance $C(.) : X \to Y$, noté $graphC$, l'ensemble $GraphC = \{(x, y) \in X \times Y / y \in C(x)\}$.
6. Soit $C : X \to 2^X$ une correspondance. GraphC est fermé si pour toute suite $(x_n, Y_n) \in GraphC, n \in N$, telle que (x_n, y_n) converge vers (x^0, y^0) alors $(x^0, y^0) \in GraphC$.

Théorème

Théorème de Brouwer Soit X un sous ensemble non vide, convexe et compact d'un espace euclidien et f une application continue de X dans X. Alors f admet un point fixe x^0. i.e. $f(x^0) = x^0$.



Théorème

Théorème de Kakutani. Soit X un sous ensemble non vide, convexe et compact et considérons une correspondance $C(.) : X \to X$ de graphe compact telle que pour tout $x \in X$, l'ensemble $C(x)$ est non vide, convexe et compact, alors $C(.)$ admet dans X un point fixe x^0. i.e. $x^0 \in C(x^0)$.

Merci Pour votre attention!