# Table des matières

# Chapitre 1

# Les espaces vectoriels

# Chapitre 2

# Les applications linéaires

## 2.1 Morphisme d'espaces vectoriels

**Définition 2.1.** Soient $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels. Une application $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ est dite **linéaire** si les conditions suivantes sont vérifiées :

**a)** $\forall\ x, y \in \mathbf{E} :\ f(x+y) = f(x) + f(y)$

**b)** $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall\ x \in \mathbf{E} : f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.

On dit dans ce cas que $f$ est un **homomorphisme ou morphisme** d'espaces vectoriels.

• Si $\mathbf{E} = \mathbf{F}$, et $f$ linéaire, on dit que $f$ est un **endomorphisme** de $\mathbf{E}$.

• Si $f$ est linéaire et bijective, on dit que $f$ est un **isomorphisme** d'espaces vectoriels.

• si $f$ est un endomorphisme bijectif, on dit que $f$ est un **automorphisme** de $\mathbf{E}$.

On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{F}$, espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

**Exemple 2.1.** *Soit l'application $f$ définie par*

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (2x, -y) \end{array}$$

- *soit* $X = (x, y)$ *et* $X' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(X + X') &= f[(x, y) + (x', y')] \\ &= f(x + x', y + y') \\ &= (2(x + x'), -y - y') \\ &= (2x, -y) + (2x', -y) \\ &= f(X) + f(X'). \end{aligned}$$

- *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(\lambda X) &= f[\lambda(x, y)] \\ &= f(\lambda x, \lambda y) \\ &= (2\lambda x, -\lambda y) \\ &= \lambda(2x, -y) \\ &= \lambda f(X). \end{aligned}$$

*Donc* $f$ *est linéaire.*

**Théorème 2.1.** *Soient* $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ *deux* $\mathbb{K}$ *espaces vectoriels et* $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ *une application. Alors*
$f$ *est linéaire* $\Longleftrightarrow \forall\ x, y \in \mathbf{E}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$

***Preuve.*** $\Longrightarrow$) on suppose que $f$ est linéaire
Soient $x, y \in \mathbf{E}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ :
$f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x) + f(\beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$
$\Longleftarrow$) On suppose que $\forall\ x, y \in \mathbf{E}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$
pour $\alpha = \beta = \mathbf{1}_{\mathbb{K}} \Longrightarrow f(x + y) = f(x) + f(y)$
pour $\beta = 0_{\mathbb{K}} \Longrightarrow f(\alpha x) = \alpha f(x)$. D'où d'après la définition ci-dessus $f$ est linéaire. $\square$

*Remarque* 2.1. Si $f$ est linéaire alors $f(0_{\mathbf{E}}) = 0_{\mathbf{F}}$. En effet
$\forall\ \alpha \in \mathbb{K},\ \forall\ x \in \mathbf{E} : f(\alpha x) = \alpha f(x).$

Pour $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ : $f(0_{\mathbb{K}}x) = 0_{\mathbb{K}}f(x) = 0_{\mathbf{F}}$.

Donc, si $f(0_{\mathbf{E}}) \neq 0_{\mathbf{F}}$ alors $f$ n'est pas linéaire.

**Exemple 2.2.** *L'application définie par*
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y+1 \end{array}$$
*n'est pas linéaire car* $f(0,0) \neq 0$.

**Exercice 2.1.** *Soit l'application définie par*
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$
*Montrer que* $f$ *est un automorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *est déterminer son automorphisme réciproque.*

## 2.2 Image et noyau d'une application linéaire

### 2.2.1 Image d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ **l'image** de $\mathbf{E}$ par $f$ est notée par $Imf$ définie par

$$Imf = \{y \in \mathbf{F}, \exists x \in \mathbf{E} : y = f(x)\} = f(\mathbf{E}).$$

**Théorème 2.2.** *Soit* $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. *Alors l'image par* $f$ *d'un sous espace vectoriel de* $\mathbf{E}$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathbf{F}$.

***Preuve.*** Soit $\mathbf{H}$ un s.e.v. de $\mathbf{E}$, montrons que $f(\mathbf{H})$ est un s.e.v. de $\mathbf{F}$.

• On a $f(\mathbf{H}) \neq \emptyset$ car $f(0_{\mathbf{E}}) = 0_{\mathbf{F}} \in f(\mathbf{H})$.

• Soit $y_1,\ y_2 \in f(\mathbf{H})$ et $\alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$ : $\alpha y_1 + \beta y_2 \in f(\mathbf{H}) : \alpha y_1 + \beta y_2 \in f(\mathbf{H})$ ?

On a $y_1 \in f(\mathbf{H}) \Longrightarrow \exists x_1 \in \mathbf{H} : y_1 = f(x_1)$.

$y_2 \in f(\mathbf{H}) \Longrightarrow \exists x_2 \in \mathbf{H} : y_2 = f(x_2)$.

$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = f(\alpha x_1 + \beta x_2)$ car $f$ est linéaire.

Or $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathbf{H}$ car $\mathbf{H}$ est un s.e.v. de $\mathbf{E}$. Donc $\alpha y_1 + \beta y_2 \in f(\mathbf{H})$.

D'où $f(\mathbf{H})$ est un s.e.v. de $\mathbf{F}$. □

### 2.2.2 Noyau d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. L'ensemble des vecteurs de $\mathbf{E}$ qui ont pour image le vecteur $0_{\mathbf{F}}$ est appelé **noyau** de $f$ et on le note $\ker f$.

$$\ker f = \{x \in \mathbf{E} : f(x) = 0_{\mathbf{F}}\} = f^{-1}(\{0_{\mathbf{F}}\}).$$

*Remarque* 2.2. $\ker f$ n'est jamais vide car $\forall\ f$ linéaire $f(0_{\mathbf{E}}) = 0_{\mathbf{F}} \Longrightarrow 0_{\mathbf{E}} \in \ker f$.

**Exemple 2.3.** *Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (y+z, x+z, x+y) \end{array}.$$

***a)*** *Dérerminer $Imf$, puis donner une base de $Imf$.*

***b)*** *Déterminer $kerf$.*

***a)*** *Soit $Y \in Imf$.*

$$\begin{aligned} Y = (y+z, x+z, x+y) &= (0,x,x) + (y,0,y) + (z,z,0) \\ &= x(0,1,1) + y(1,0,1) + z(1,1,0). \end{aligned}$$

*Donc $Imf =< v_1 = (0,1,1),\ v_2 = (1,0,1),\ v_3 = (1,1,0) >$*

*De plus la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre . Donc c'est une base de $Imf$.*

$\dim Imf = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ *et comme $Imf \subset \mathbb{R}^3$ alors $Imf = \mathbb{R}^3$*

***b)*** $\ker f = \{X \in \mathbb{R}^3 : f(X) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$$f(X) = (y+z, x+z, x+y) = (0,0,0) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y+z=0 \\ x+z=0 \\ x+y=0 \end{array} \right. \Longrightarrow (x,y,z) = (0,0,0).$$

*D'où* $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

**Théorème 2.3.** *Pour toute application linéaire, $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$. $\ker f$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{E}$.*

***Preuve.*** • On a $\ker f \neq \emptyset$ car $0_{\mathbf{E}} \in \ker f$ (car $f(0_{\mathbf{E}}) = 0_{\mathbf{F}}$).

• Soit $x, y \in \ker f$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \alpha f(x) + \beta f(y) \text{ (car } f \text{ est linéaire} \\ &= \alpha 0_{\mathbf{F}} + \beta 0_{\mathbf{F}} \\ &\Longrightarrow \alpha x + \beta y \in \ker f \end{aligned}$$

D'où $\ker f$ est un s.e.v. de $\mathbf{E}$. □

**Théorème 2.4.** *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Alors*

***a)*** *$f$ injective $\Longleftrightarrow \ker f = \{0_{\mathbf{E}}\}$.*

***b)*** *$f$ surjective $\Longleftrightarrow Imf = \mathbf{F}$.*

***Preuve.*** **a)** $\Longrightarrow$) Supposons que $f$ est injective et montrons que $\ker f = \{0_{\mathbf{E}}\}$.

Soit $x \in \ker f \Longrightarrow f(x) = 0_{\mathbf{F}} = f(0_{\mathbf{E}}) \Longrightarrow x = 0_{\mathbf{E}}$ (car $f$ est injective).

D'où $\ker f = \{0_{\mathbf{E}}\}$.

$\Longleftarrow$) Supposons que $\ker f = \{0_{\mathbf{E}}\}$ et montrons que $f$ est injective.

Soient $x_1,\ x_2 \in \mathbf{E}$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$

$$\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0_{\mathbf{F}} \\
&\Longrightarrow f(x_1 - x_2) = 0_{\mathbf{F}} (\text{car } f \text{ est linéaire} \\
&\Longrightarrow x_1 - x_2 = 0_{\mathbf{E}} \ (\text{car } \ker f = \{0_{\mathbf{E}}\} \\
&\Longrightarrow x_1 = x_2 \\
&\Longrightarrow f est injective.
\end{aligned}$$

**b)** $\Longrightarrow$) Supposons que $f$ est surjective et montrons que $Imf = \mathbf{F}$.

On a $Im\mathbf{F} \subset \mathbf{F}$.

D'autre part $\forall\ y \in \mathbf{F} \Longrightarrow \exists x \in \mathbf{E} : y = f(x)$ (car $f$ est surjective)

D'où $y \in Imf$. Par conséquant $Imf = \mathbf{F}$.

$\Longleftarrow$) Supposons que $Imf = \mathbf{F}$ et montrons que $f$ est surjective.

$$\begin{aligned}
Imf = \mathbf{F} &\Longrightarrow \mathbf{F} \subset Imf \\
&\Longrightarrow \forall\ y \in \mathbf{F} \Longrightarrow y \in Imf \\
&\Longrightarrow \exists x \in \mathbf{E} : y = f(x) \\
&\Longrightarrow f surjective.
\end{aligned}$$

$\square$

## 2.3 Application linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie

Soient $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriel tel que $\dim_K \mathbf{E} = n$.

**Théorème 2.5.** *Soit* $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *une base de* $\mathbf{E}$ *et soient* $y_1, y_2, \ldots, y_n,\ n$ *vecteurs* *quelconques de* $\mathbf{F}$*. Alors, il existe une application linéaire unique* $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ *telle que* $\forall i = \overline{1,n}, \quad f(e_i) = y_i$.

***Preuve.*** $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de $\mathbf{E} \Longrightarrow \forall x \in \mathbf{E} : x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ ($\alpha_i \in \mathbb{K}$, uniques).

Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbf{E} & \longrightarrow & \mathbf{F} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = f(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) \end{array}$$

• $f$ est bien une application car $\forall x \in \mathbf{E},\ f(x)$ est unique (les $y_i$ sont choisis par hypothèse et les $\alpha_i$ sont uniques).

• Montrons que $f$ est linéaire :

Soient $x, y \in \mathbf{E}$ : $\quad x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad y = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i e_i, \ f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i, \quad f(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i y_i.$

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) y_i \text{ (d'après la définition de } f) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x \in \mathbf{E}$

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= f\left(\lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i y_i \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \\ &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

• Montrons l'unicité

Soient $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ telles que $f(e_i) = g(e_i) = y_i,\ \forall i = \overline{1, n}$

soit $x \in \mathbf{E} \Longrightarrow x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \\ g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbf{E}.$$

D'où $f$ est unique. $\square$

**Théorème 2.6.** *Soit $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ un $\mathbb{K}$-e.v et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Alors*

***a)*** *$f$ injective $\Longleftrightarrow f(\mathbf{B})$ est libre de $\mathbf{F}$.*

***b)*** *$f$ surjective $\Longleftrightarrow f(\mathbf{B})$ est génératrice de $\mathbf{F}$.*

***c)*** *$f$ bijective $\Longleftrightarrow f(\mathbf{B})$ est une base de $\mathbf{F}$.*

***Preuve.*** **a)** $\Longrightarrow$) Supposons que $f$ est injective et montrons que $f(\mathbf{B}) = \{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$ est libre de $\mathbf{F}$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = 0_{\mathbf{F}} \quad &= \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \\ &\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0_{\mathbf{E}} \text{ car } f \text{ est injective} \\ &\Longrightarrow \quad \alpha_i = 0_{\mathbb{K}} \text{ car } \mathbf{B} \text{ est libre.} \end{aligned}$$

D'où $f(\mathbf{B})$ est libre.

$\Longleftarrow$) Supposons que $f(\mathbf{B})$ est libre et montrons que $f$ est injective.

Soient $x_1,\ x_2 \in \mathbf{E}$, tel que $f(x_1) = f(x_2)$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Longrightarrow \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\right) \\ &\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f(e_i) \\ &\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) f(e_i) = 0_{\mathbf{F}} \\ &\Longrightarrow \quad \alpha_i - \beta_i = 0_{\mathbb{K}} \text{ car } f(\mathbf{B}) \text{ est libre.} \end{aligned}$$

D'où $x_1 = x_2$ et $f$ est injective

**b)** $\Longrightarrow$) Supposons que $f$ est surjective et montrons que $f(\mathbf{B})$ est génératrice de $\mathbf{F}$.

Soit $y \in \mathbf{F} \Longrightarrow \exists x \in \mathbf{E} : y = f(x)$ or $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\ \alpha_i \in \mathbb{K}$

$y = f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i)$. D'où $f(\mathbf{B})$ est une famille génératrice de $F$.

$\Longleftarrow$)Supposons que $f(\mathbf{B})$ est génératrice et montrons que $f$ surjective

Soit $y \in \mathbf{F} \Longrightarrow y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i)$ car $f(\mathbf{B})$ est génératrice de $\mathbf{F}$.

$y = f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)$ car $f$ est linéaire.

D'où $\forall y \in \mathbf{F},\ \exists x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in \mathbf{E}$ tel que $y = f(x)$. Donc $f$ est surjective.

**c)** $f$ bijective$\Longleftrightarrow$ $f$ est injective et surjective $\Longleftrightarrow$ $f(\mathbf{B})$ est libre et génératrice.

D'où $f(\mathbf{B})$ est une base de $\mathbf{F}$. □

**Exemple 2.4.** *Soit* $\mathbf{B} = \{v_1 = (1,2), v_2 = (3,5)\}$ *une base* $\mathbf{R}^2$ *et*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x, y-x) \end{array}$$

*Pour montrer $f$ est injective, il suffit de montrer que $f(\mathbf{B})$ est libre :*

$f(\mathbf{B}) = \{f(v_1) = (2,1),\ f(v_2) = (6,2)\}$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = 0_{\mathbb{R}^2} \Longrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 6\beta = 0, \\ \alpha + 2\beta = 0, \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$

*D'où $f(\mathbf{B})$ est libre et donc $f$ est injective.*

*Pour montrer que $f$ est surjective il suffit de montrer que $f(\mathbf{B})$ est génératrice de* $\mathbb{R}^2$

*Soit* $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \Longrightarrow \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (x,y) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$ *?*

$\begin{cases} x = 2\alpha + 6\beta, \\ y = \alpha + 2\beta, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = x - 3y \\ \beta = \frac{x-2y}{2} \end{cases}$

*D'où $f(\mathbf{B})$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ et donc $f$ est surjective.*

### 2.3.1 Rang d'une application linéaire

**Définition 2.2.** Soient $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$.

On appelle **rang** de $f$ et on note $rg(f)$ la dimension de l'image de $f$.

$rg(f) = \dim(Imf)$

### 2.3.2 Théorème du rang

**Théorème 2.7.** *Soient* $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$*. Alors*

$$\dim \mathbf{E} = \dim \ker f + \dim Imf.$$

***Preuve.*** Soient $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ une base de $\ker f \Longrightarrow \dim \ker f = p$.

$\mathbf{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_q\}$.

Montrons que $\dim \mathbf{E} = p + q$

Soit $y \in Imf \Longrightarrow \exists x \in \mathbf{E} : y = f(x)$.

$y$ est combinaison linéaire des vecteurs $c_1, c_2, \ldots, c_q$, donc $\exists$ $q$ vecteurs tels que :

$f(e_{p+1}) = c_1, f(e_{p+2}) = c_2, \ldots, f(e_{p+q}) = c_q$.

On pose $\mathbf{B}' = \{e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_{p+q}\}$

Montrons que $\mathbf{B} \cup \mathbf{B}'$ est une base de $\mathbf{E}$

Soit $x \in \mathbf{E}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_q c_q \\ &= \alpha_1 f(e_{p+1}) + \alpha_2 f(e_{p+2}) + \ldots + \alpha_q f(e_{p+q}) \\ &= f(\alpha_1 e_{p+1} + \alpha_2 e_{p+2} + \ldots + \alpha_q e_{p+q}) \text{ car } f \text{ est linéaire} \end{aligned}$$

On pose $x' = \alpha_1 e_{p+1} + \alpha_2 e_{p+2} + \ldots + \alpha_q e_{p+q}$

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Longrightarrow f(x - x') = 0_{\mathbf{F}} \\ &\Longrightarrow x - x' \in \ker f \\ &\Longrightarrow x - x' = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_p e_p, \quad \beta_i \in \mathbb{K} \\ &\Longrightarrow x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_p e_p + \alpha_1 e_{p+1} + \alpha_2 e_{p+2} + \ldots + \alpha_q e_{p+q} \end{aligned}$$

Donc $\mathbf{B} \cup \mathbf{B}'$ est une famille génératrice de $\mathbf{E}$.

Montrons que $\mathbf{B} \cup \mathbf{B}'$ est libre de $\mathbf{E}$.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{p+q} \in \mathbb{K}$

$\sum\limits_{i=1}^{p+q} \alpha_i e_i = 0_{\mathbf{E}} \Longrightarrow \alpha_i = 0_{\mathbb{K}},\ \forall i = \overline{1, p+q}\,$?

$$\sum_{i=1}^{p+q} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i e_i = 0_{\mathbf{E}}. \tag{2.1}$$

En appliquant $f$ on aura
$\sum_{i=1}^{p+q} \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(e_i) + \sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i f(e_i) = f(0_{\mathbf{E}}) = 0_{\mathbf{F}}$.
Or $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i\right) = 0_{\mathbf{E}}$ car $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \in \ker f$. Donc
$\sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i f(e_i) = 0_{\mathbf{F}} \Longrightarrow \alpha_i = 0_{\mathbb{K}},\ \forall i = \overline{p+1, p+q}$ car $\mathbf{B}' = \{e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_{p+q}\}$ est une base de $Imf$.

En remplaçant dans l'équation (2.1), on aura $\sum \alpha_i e_i = 0_{\mathbf{E}} \Longrightarrow \alpha_i = 0_{\mathbb{K}},\ \forall i = \overline{1, p}$ car $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ est une base de $\ker f$.

Donc $\alpha_i = 0_{\mathbb{K}},\ \forall i = \overline{1, p+q} \Longrightarrow \mathbf{B} \cup \mathbf{B}'$ est une base de $\mathbf{E}$ par conséquent :
$\dim \mathbf{E} = p + q = \dim \ker f + \dim Imf$. □

**Théorème 2.8.** *Soit* $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels tel que* $\dim \mathbf{E} = \dim \mathbf{F} < \infty$ *et* $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. *Alors*

$$f \text{ est injective } \Longleftrightarrow f \text{ est surjective } \Longleftrightarrow f \text{ est bijective.}$$

***Preuve.***

$$\begin{aligned} \text{Si } f \text{ injective } \Longleftrightarrow \ker f = \{0_{\mathbf{E}}\} &\Longrightarrow \dim Imf = \dim \mathbf{E} = \dim \mathbf{F} \\ &\Longrightarrow Imf = \mathbf{F} \\ &\Longrightarrow f \text{ surjective} \\ &\Longrightarrow f \text{ bjective} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } f \text{ surjective } &\Longrightarrow Imf = \mathbf{F} \\ &\Longrightarrow \dim Imf = \dim \mathbf{F} = \dim \mathbf{E} \\ &\Longrightarrow \dim \ker f = 0 \\ &\Longrightarrow f \text{ injective} \\ &\Longrightarrow f \text{ bjective} \end{aligned}$$

□

*Remarque* 2.3. Ce théorème est applicable dans le cas particulier : $f$ est un endomorphisme de **E**.

**Envoyer vos questions à l'adresse e-mail :** *l_berdjoudj@yahoo.fr*

# Bibliographie


[1] J. Grifone, « *Algèbre linéaire.* » Paris : Cepadues, 2015. **Côte : 512.5/109**

[2] A. Pillier, « *Algèbre linéaire : manuel d'exercices corrigés avec rappels de cours +interros.* » Paris : Premium, 2013. **Côte : 512.5/108**

[3] D. Prochasson, « *Algèbre : 1ère année : exercices corrigés.* » Paris : Francis Lefebvre, 2003. **Côte : 512/15**

[4] M. Queysanne, « *Algèbre : 1er cycle scientifique, préparation aux grandes écoles.* » Paris : Armand Colin, 1964. **Côte : 512/73**