Université A. MIRA-Bejaia

Faculté des sciences exactes

Département de Mathématiques / MI

Jeudi, 22 février 2018

Corrigé et barème de l'examen d'Analyse 1
2017 / 2018

Questions de cours : (04 pts)

~~(1) Non, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas forcément convergente~~

~~Contre exemple. $U_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.~~

~~$U_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_{2n} = 1$~~

~~$U_{4n} = (-1)^{4n} = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_{4n} = 1$~~

~~$\lim_{n\to+\infty} U_{2n} = \lim_{n\to+\infty} U_{4n} = 1$ mais $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n$ n'existe pas~~

~~Il existe deux sous-suites (U_{2n}) et (U_{4n}) de (U_n) qui convergent vers la même limite mais la suite (U_n) est divergente~~

(1) La condition : (U_n) est bornée. (D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, de toute suite (réelle) bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

1

(2) I est un fermé borné (0,5) (c.à.d. du type $[a,b]$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$)

f est continue sur I (0,5)

(alors f est bornée sur I et atteint ses bornes, en particulier f atteint sa borne supérieure, c.à.d $\exists\, c \in I : f(c) = \sup_{x\in I} f(x)$)

(3) Non. (0,25)

Contre exemple : La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $]0,1[$ mais elle n'est pas uniformément continue sur $]0,1[$ (0,75)

~~(5) La condition $f'(x_0) = 0$ (nécessaire mais pas suffisante)~~

(4) $g(a) \neq g(b)$. car sinon d'après le théorème de Rolle

$\exists\, c \in]a,b[,\ g'(c) = 0$. Or par hypothèse

$\forall x \in]a,b[: g'(x) \neq 0$

1

Exercice 01 (03 pts) $A = [0, 1[$.

- $A \neq \phi$ car $\exists x_0 = 0 \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 \in A$

$\forall x \in A$: $0 \leq x < 1$; c.à.d A est borné (majoré et minoré)

$\begin{cases} A \neq \phi \text{ majoré} \Rightarrow \sup A \text{ existe} & (0,25) \\ A \neq \phi \text{ minoré} \Rightarrow \inf A \text{ existe} & (0,25) \end{cases}$

Les éléments de A sont tous minorés par 0 qui appartient lui même à A alors $\text{MIN } A = 0$ (existe). (0,5)

Ce qui entraîne que $\inf A = \text{MIN } A = 0$ (0,5).

- Montrons que $\sup A = 1$.

1 est un majorant de A reste à montrer qu'il est le plus petit

$\forall \varepsilon > 0$ $\overset{?}{\exists}$ $x_0 \in A$ tel que $x_0 > 1 - \varepsilon$ (0,5)

Si $\varepsilon > 1$ alors $1 - \varepsilon < 0$. Comme $0 \in A$ alors il suffit de prendre $x_0 = 0$

Sinon $(0 < \varepsilon \leq 1)$ alors $1 - \varepsilon \geq 0$

$$0 \leq 1 - \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1$$

il suffit de prendre $x_0 = 1 - \varepsilon/2 \in [0, 1[= A$

D'où, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_0 \in A$ tel que $x_0 > 1 - \varepsilon$

où $x_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon > 1 \\ 1 - \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } 0 < \varepsilon \leq 1 \end{cases}$ (0,5)

Il en résulte $\sup A = 1$

- Montrons que MAX A n'existe pas. (par l'absurde)

Supposons que MAX A existe alors par définition

(0,5) $\text{MAX } A = \sup A = 1$ et $1 \in A$ contradiction

(car $1 \notin A$)

Exercice 02 (07 pts) $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$, $v_{n+1} = \frac{3u_n v_n}{2u_n + v_n}$

(1) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n < v_n < 4u_n$

(a) pour $n = 0$, on a bien 0,5 $u_0 < v_0 < 4u_0$ (puisque $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$)

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n < v_n < 4u_n$ et montrons que u_{n+1} 0,5 $< v_{n+1} < 4u_{n+1}$. On a :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3u_n v_n}{2u_n + v_n} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{9u_n v_n - 4u_n^2 - v_n^2 - 4u_n v_n}{3(2u_n + v_n)}$$

$$= \frac{5u_n v_n - 4u_n^2 - v_n^2}{3(2u_n + v_n)} = \frac{4u_n v_n - 4u_n^2 - v_n^2 + u_n v_n}{3(2u_n + v_n)}$$

$$= \frac{4u_n(v_n - u_n) - v_n(v_n - u_n)}{3(2u_n + v_n)} = \frac{(4u_n - v_n)(v_n - u_n)}{3(2u_n + v_n)} \quad 0,5$$

Mais comme $u_n < v_n < 4u_n$ (hypothèse de récurrence) on a $v_n - u_n > 0$ et $4u_n - v_n > 0$, d'où $(4u_n - v_n)(v_n - u_n) > 0$

Ce qui entraine que : $v_{n+1} - u_{n+1} > 0$ 0,5 ($2u_n + v_n > 0$ car $u_n > 0$ et $v_n > 0$)

càd : $u_{n+1} < v_{n+1}$

$$v_{n+1} - 4u_{n+1} = \frac{3u_n v_n}{2u_n + v_n} - 4\left(\frac{2u_n + v_n}{3}\right)$$

$$= \frac{9u_n v_n - 16u_n^2 - 4v_n^2 - 16u_n v_n}{3(2u_n + v_n)} \quad 0,5$$

$$= \frac{-16u_n^2 - 4v_n^2 - 7u_n v_n}{3(2u_n + v_n)} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ce qui achève cette récurrence et cette démonstration

(2) (a) Etudions la monotonie de $(u_n)_n$: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \frac{v_n - u_n}{3} > 0$ (car $u_n < v_n$ d'après la 1ère question). D'où $u_{n+1} - u_n > 0$ 0,5

Ce qui montre que $(u_n)_n$ est strictement croissante

(b) Etudions la monotonie de $(v_n)_n$: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$v_{n+1} - v_n = \frac{3u_n v_n}{2u_n + v_n} - v_n = \frac{u_n v_n - v_n^2}{2u_n + v_n} = \frac{v_n(u_n - v_n)}{2u_n + v_n} < 0$ 0,5

(car $v_n > 0$, $u_n < v_n$ d'après la 1ère question). D'où $v_{n+1} - v_n < 0$. Ce qui montre que $(v_n)_n$ est strictement décroissante

(3) (a) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N} ; |v_{n+1}-u_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|v_n-u_n|$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $v_{n+1}-u_{n+1} = \frac{(v_n-u_n)(4u_n-v_n)}{3(2u_n+v_n)}$

Donc, $|v_{n+1}-u_{n+1}| = \frac{4u_n-v_n}{3(2u_n+v_n)}|v_n-u_n|$ $\left(\text{car } \begin{array}{l}4u_n-v_n>0\\ 2u_n+v_n>0\end{array}\right)$

On a, $\begin{cases} 4u_n-v_n < 4u_n-u_n = 3u_n & (\text{car } u_n<v_n)\\ 2u_n+v_n > \frac{1}{2}u_n+u_n = \frac{3}{2}u_n & (\text{car } \frac{1}{2}u_n<\frac{1}{2}v_n<2u_n)\end{cases}$

comme $u_n\neq 0$, $v_n\neq 0$ alors $\frac{1}{2u_n+v_n} < \frac{2}{3u_n}$

D'où, $\frac{4u_n-v_n}{3(2u_n+v_n)} < \frac{3u_n}{3}\cdot\frac{2}{3u_n} = \frac{2}{3}$ (1)

Il en résulte, $\forall n\in\mathbb{N} : |v_{n+1}-u_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|v_n-u_n|$

(b) En déduire que (u_n) et (v_n) sont adjacentes :

On a $\forall n\in\mathbb{N} : |v_{n+1}-u_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|v_n-u_n|$

En itérant plusieurs fois cette inégalité, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}|v_n-u_n| &\leq \frac{2}{3}|v_{n-1}-u_{n-1}|\\ &\leq \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}|v_{n-2}-u_{n-2}|\\ &\ \vdots\\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |v_0-u_0|\end{aligned}$$

C.à.d $0 \leq v_n-u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ (0,5)

Comme $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ est décroissante alors pour montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes il reste à montrer que $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n) = 0$ (0,5)

Comme $\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, alors d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = 0$ (0,5)

Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont bien adjacentes

(4) Comme $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes alors elles sont convergentes et ont une même limite. Soit $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $v_{n+1}\cdot u_{n+1} = \frac{3u_nv_n}{2u_n+v_n}\cdot\frac{2u_n+v_n}{3} = v_nu_n$ (1)

Ceci montre que la suite $(u_nv_n)_n$ est constante. On a, par conséquent, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n\cdot u_n = v_0\cdot u_0 = 2$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

$\lim_{n\to+\infty} v_nu_n = 2$. C.à.d $\ell\cdot\ell = 2$. D'où $\ell^2 = 2 \iff (\ell=\sqrt{2}$ ou bien $\ell=-\sqrt{2})$

Comme $u_n>0$, $v_n>0$ alors $\boxed{\ell=\sqrt{2}}$ $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{2}$

sur $]-1,0[$: $f(x) = \frac{x}{\ln(x+1)} - 1$ (0,25)

f est dérivable sur $]-1,0[$ car elle est la somme et produit de fonctions usuelles dérivables sur $]-1,0[$.

→ En $x=0$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)} = \frac{0}{0} (F.I)$$

on pose, $\begin{cases} a(x) = x - \ln(x+1) \\ b(x) = x\ln(x+1) \end{cases}$ $a(x)$ et $b(x)$ sont dérivables au voisinage de 0.

$$\frac{a'(x)}{b'(x)} = \frac{1-\frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+\ln(x+1)} = \frac{x}{x+(x+1)\ln(x+1)} = \frac{1}{1+(x+1)\cdot\frac{\ln(x+1)}{x}} \xrightarrow[x \overset{<}{\to} 0]{} \frac{1}{2}$$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{a'(x)}{b'(x)} = \frac{1}{2}$ existe, d'après la règle de l'Hospitale (1)

$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{a'(x)}{b'(x)} = \frac{1}{2}$. f est dérivable à gauche de 0 est on a : $f'_g(0) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \frac{0}{0} \quad F.I$$

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \frac{1}{x}\,\frac{\ln\left[\left(\frac{e^x-1}{x}-1\right)+1\right]}{\left(\frac{e^x-1}{x}-1\right)}\cdot\left(\frac{e^x-1}{x}-1\right)$$

$$= \frac{e^x-x-1}{x^2}\cdot\frac{\ln\left[\left(\frac{e^x-1}{x}-1\right)+1\right]}{\left(\frac{e^x-1}{x}-1\right)}$$

comme $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln\left[\left(\frac{e^x-1}{x}-1\right)+1\right]}{\frac{e^x-1}{x}-1} = 1$

(car $X = \frac{e^x-1}{x} - 1 \xrightarrow[x \overset{>}{\to} 0]{} 0^+$ et $\lim_{X \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1$) (1)

Alors $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{e^x-x-1}{x^2} = \frac{0}{0}$. (F.I)

on pose $\begin{cases} u(x) = e^x - x - 1 \\ v(x) = x^2 \end{cases}$ u et v sont dérivables au voisinage de 0

$\frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{e^x-1}{2x} \xrightarrow[x \overset{>}{\to} 0]{} \frac{1}{2}$ existe.

D'après la règle de l'Hospitale $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{1}{2}$

f est dérivable à droite de 0 et on a ;

$f'_d(0) = \frac{1}{2}$. Comme $f'_g(0) = f'_d(0)$ alors f est dérivable en 0 et on a $f'(0) = \frac{1}{2}$. (0,5)

est en résulté, f est dérivable sur $]-1,+\infty[$

→

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Université A. Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques/MI

1ère année MI
Année universitaire
2017/2018

EXAMEN D'ANALYSE I

Durée : 01H :30 min.

Questions de cours (04 pts)

(1) Citer une condition pour qu'une suite réelle divergente possède une sous-suite convergente.

(2) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Citer des conditions suffisantes sur f et I qui assurent l'existence d'un $c \in I$ tel que $f(c) = \sup\limits_{x \in I} f(x)$.

(3) Une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est-elle uniformément continue sur cet intervalle ? Justifier.

(4) Dans le théorème des accroissements finis généralisés, qu'est ce qui justifie que le résultat soit bien défini ?

Exercice 1 (03 pts). Déterminer la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum s'ils existent de l'ensemble suivant (**en justifiant, si nécessaire, vos réponses en utilisant la caractérisation des bornes supérieure et inférieure**).

$$A = [0, 1[.$$

Exercice 2 (07 pts). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites de réels strictement positifs définies par :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{3u_n v_n}{2u_n + v_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

(1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n < v_n < 4u_n$.
☞ Développer d'abord le produit $(v_n - u_n)(4u_n - v_n)$.

(2) Étudier la monotonie de chacune des deux suites $(u_n)_n$ et $(u_n)_n$.

(3) (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|v_{n+1} - u_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|v_n - u_n|$.
(b) En déduire que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

(4) Déterminer la limite de chacune des deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

Exercice 3 (06 pts). On définit la fonction f suivante : $f(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{x}{\ln(x+1)} - 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(1) Étudier la continuité de f sur $]-1, +\infty[$.

(2) Étudier la dérivabilité de f sur $]-1, +\infty[$.

Fin

Bon courage

Date: **Jeudi, 22 février 2018.**