جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Université A. Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques/MI

1ère année MI
Année universitaire
2016/2017

EXAMEN D'ANALYSE II

Durée : (02) deux heures.

Exercice 1 (03 pts). *Questions de cours*

(1) Que doit vérifier une fonction f pour qu'elle admette un développement de Taylor avec reste de Young à l'ordre 3, au voisinage de 0 ? Puis, écrire ce développement.

(2) Citer deux propriétés de l'intégrale de Riemann.

(3) Une fonction intégrable sur un intervalle est-elle nécessairement continue sur cet intervalle ? justifier votre réponse.

Exercice 2 (03 pts). A l'aide de la formule de Taylor, reste de Lagrange, montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[: \quad x - \frac{x^3}{2} < \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) < x.$$

Exercice 3 (04 pts). On considère la fonction suivante : $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}\sqrt{1+x}}{1+x^2}$.

(1) Écrire le développement limité de f au voisinage de 0, à l'ordre 2.

(2) En déduire la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\left(1 - e^{-x}\sqrt{1+x}\right)\sin x}{x^2(1+x^2)}\right).$$

Exercice 4 (04 pts). En utilisant les sommes de Riemann, calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \to +\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\ln(3n^2+k^2) - 2\ln n}{n}\right).$$

Exercice 5 (06 pts). On considère la fraction rationnelle suivante : $f(t) = \dfrac{1}{(t+1)(t^2-t+1)}$.

(1) Décomposer f en éléments simples.

(2) Calculer $\displaystyle\int f(t)\,dt$.

(3) En déduire la valeur de l'intégrale définie suivante : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^4}{(1+x^2)^3 + 8x^3}\,dx$.

Fin

Bon courage

Date: Jeudi, 22 juin 2017.

Université A. MIRA - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques / MI
corrigé et barème de l'examen
d'Analyse 2 2016/2017 (S2)

22/06/2017

Exercice 01 (03 pts) (1) f doit vérifier l'hypothèse suivante : $f^{(3)}(0)$ existe (0,5)

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + o(x^3)$$ (0,5)

où $o(x^3) = x^3 \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

(2) Les deux propriétés : par exemple la linéarité de l'intégrale et la relation de CHASLES

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$ (0,5)

$\forall c \in]a,b[: \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (0,5)

(3) Non (0,5). Contre exemple : une (0,5) fonction f en escalier sur $[a,b]$ et intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ $\left(I(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (x_{k+1} - x_k)\right)$ mais elle n'est pas continue sur $[a,b]$.

Exercice 02 (03 pts) Montrons que $\forall x \in]0,+\infty[: x - \frac{x^3}{2} < \ln(x+\sqrt{x^2+1}) < x$

La fonction $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ par suite elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor-Lagrange ; $\exists c \in]0,x[: f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(c)$ (0,5)

$f(0) = 0$ (0,25) ; $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(0) = 1$ (0,25)

$f''(x) = \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f''(c) = -\frac{c}{(c^2+1)^{3/2}}$ (0,25)

D'où, $\exists c \in]0,x[: f(x) = x - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{c}{(c^2+1)^{3/2}}$ (1)

$0 < c < x \Rightarrow 1 < (c^2+1)^{3/2} < (x^2+1)^{3/2}$

$\Rightarrow \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} < \frac{1}{(c^2+1)^{3/2}} < 1$ (0,25)

$\Rightarrow 0 < \frac{c}{(c^2+1)^{3/2}} < x$ (0,25)

$\Rightarrow -\frac{x^3}{2} < -\frac{x^2}{2} \cdot \frac{c}{(c^2+1)^{3/2}} < 0$ (0,25)

$\Rightarrow x - \frac{x^3}{2} < x - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{c}{(c^2+1)^{3/2}} < x$

D'où, $\forall x \in]0,+\infty[: x - \frac{x^3}{2} < \ln(x+\sqrt{x^2+1}) < x$

Exercice 03 (04pts) $\quad f(x) = \dfrac{1-e^{-x}\sqrt{1+x}}{1+x^2}$

(1) $DL_2(0)$?

Au $V(0)$ on a : $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ 0,25

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ 0,25

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$ 0,25

$e^{-x}\sqrt{1+x} = \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)$

$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

$1 - e^{-x}\sqrt{x+1} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ 1

$\frac{1-e^{-x}\sqrt{x+1}}{1+x^2} = \left(1 - x^2 + o(x^2)\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)$

$= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

D'où $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ 1

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-e^{-x}\sqrt{x+1})\sin x}{x^2(1+x^2)} = \dfrac{0}{0}$ F.I

Au $V(0)$ on a : $\sin x = x + o(x^2)$ 0,25

$\left(\frac{1-e^{-x}\sqrt{x+1}}{1+x^2}\right)\cdot\frac{\sin x}{x^2} = \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)\left(\frac{1}{x} + o(1)\right)$

$= \frac{1}{2} + \frac{x}{8} + o(x)$ 0,5

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-e^{-x}\sqrt{x+1})\sin x}{x^2(1+x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2} + \frac{x}{8}$

$= \frac{1}{2}$ 0,5

Exercice 04 (04pts) On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(3n^2+k^2) - 2\ln n}{n}$

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(3n^2+k^2) - \ln n^2}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{3n^2+k^2}{n^2}\right)$

$= \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left[3 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$

$= \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(k/n)$ 0,5

La fonction $f(x) = \ln(3+x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par suite sur $[0,1]$. donc intégrable sur $[0,1]$. D'après les sommes de Riemann

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \ln(3+x^2)\,dx$ 0,5

On pose $\begin{cases} u = \ln(3+x^2) \Rightarrow du = \frac{2x}{3+x^2} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$

$\int_0^1 \ln(3+x^2)\,dx = \left[x\ln(3+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{3+x^2}\,dx$ 0,5

$$\int_0^1 \ln(3+x^2)\,dx = 2\ln(2) - 2\int_0^1 \frac{x^2+3-3}{x^2+3}\,dx$$
$$= 2\ln(2) - 2\int_0^1 dx + 6\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3}$$
$$= -2 + 2\ln(2) + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} \quad 0{,}5$$

(On pose $t = \frac{x}{\sqrt{3}}$ (0,5) $\Rightarrow dx = \sqrt{3}\,dt$ $\quad x \to 0 \Rightarrow t \to 0$, $x \to 1 \Rightarrow t \to \frac{1}{\sqrt{3}}$) 0,5

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}\,dt}{1+t^2} = \sqrt{3}\,[\operatorname{arctg} t]_0^{1/\sqrt{3}} = \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6} \quad 0{,}5$$

D'où,
$$\int_0^1 \ln(3+x^2)\,dx = -2 + 2\ln 2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}\right)$$

Il en résulte, $\lim_{n\to+\infty} S_n = -2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} + 2\ln(2) = -2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 4$ 0,5

Exercice 05 (06 pts) $\quad f(t) = \dfrac{1}{(t+1)(t^2-t+1)}$

1) $f(t) = \dfrac{a}{t+1} + \dfrac{bt+c}{t^2-t+1}$ 0,5

$$= \frac{(a+b)t^2 + (b+c-a)t + a+c}{(t+1)(t^2-t+1)}$$

par identification on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a+c=1 \\ b+c-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ c=1-a \\ -a+1-a-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1/3 & 0{,}5 \\ c=2/3 & 0{,}5 \\ a=1/3 & 0{,}5 \end{cases}$$

D'où, $f(t) = \dfrac{1}{3(t+1)} + \dfrac{-t+2}{3(t^2-t+1)}$

2) $$\int f(t)\,dt = \frac{1}{3}\left[\underbrace{\int \frac{dt}{t+1}}_{I} + \underbrace{\int \frac{2-t}{t^2-t+1}\,dt}_{J}\right]$$

$I = \ln|t+1| + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$ 0,5

$$J = \int \frac{2-t}{t^2-t+1}\,dt = \int \frac{2-t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dt = \frac{4}{3}\int \frac{2-t}{1+\left(\frac{t-1/2}{\sqrt{3}/2}\right)^2}\,dt$$

On pose $x = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)$ 0,5 $\Rightarrow dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dx$ et $t = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$J = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{2-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}}{1+x^2}\,dx$$
$$= \sqrt{3}\int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \sqrt{3}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} \quad 0{,}5$$
$$= \sqrt{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}$$

D'où, $J = \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}(t^2-t+1) + C_2$ 0,5

Il en résulte,

$$\int f(t)\,dt = \frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + C,\ C\in\mathbb{R}$$

(3) En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^4}{(1+x^2)^3+8x^3}\,dx$

on pose $\displaystyle K = \int_0^1 \frac{1-x^4}{(1+x^2)^3+8x^3}\,dx = \int_0^1 \frac{1-x^4}{(1+x^2)^3\cdot\left[1+\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^3\right]}\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{(1+x^2)(1-x^2)}{(1+x^2)^3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^3}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^3}\,dx$$

0,5

On pose $u = \dfrac{2x}{1+x^2} \Rightarrow du = 2\,\dfrac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\,dx$, $\begin{cases} x\to 0 \Rightarrow u\to 0 \\ x\to 1 \Rightarrow u\to 1\end{cases}$

0,5

$$K = \int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\cdot\frac{1}{1+u^3}\cdot\frac{(1+x^2)^2}{2(1-x^2)}\,du$$

0,5 $\displaystyle = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{1+u^3} = \frac{1}{2}\int_0^1 f(u)\,du$ $\left(\text{car } 1+u^3 = (1+u)(u^2-u+1)\right)$

$$\int_0^1 f(u)\,du = \left[\frac{1}{3}\ln|u+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(u-\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\ln(u^2-u+1)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \qquad \left(\text{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}\right)$$

D'où, $\displaystyle K = \frac{1}{2}\int_0^1 f(u)\,du$

0,5

$$= \frac{1}{6}\ln(2) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$