جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Université A. Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques/MI

1ère année MI
Année universitaire
2017/2018

EXAMEN D'ANALYSE II

Durée : (01H :30 min)

Exercice 1 (06 pts). On considère la fonction suivante : $f(x) = \dfrac{\sin x - e^{-x}\ln(x+1)}{1+x}$.

(1) Écrire le développement limité de f au voisinage de 0, à l'ordre 3.

(2) En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-e^{x}\sin x + \ln(x+1)}{x^2(x+1)e^x}$.

Exercice 2 (04 pts). En utilisant les sommes de Riemann, calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\ln(k + \sqrt{n^2+k^2}) - \ln n}{n} \right).$$

Exercice 3 (10 pts).

(1) On considère la fraction rationnelle suivante : $f(t) = \dfrac{1+t+t^2}{(t+1)(t^2+4t+5)}$.

(a) Décomposer f en éléments simples.

(b) Calculer l'intégrale indéfinie suivante : $\displaystyle\int f(t)\,dt$.

(2) Calculer la valeur de l'intégrale définie suivante : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1+\cos x)(1+\sin x)}$.

Fin

Bon courage

Date: **Lundi, 11 juin 2018.**

Université A. MIRA - Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques / MI

Lundi, 11 juin 2018

Corrigé et barème de l'examen d'Analyse 2 2017/2018

Exercice 1 (06 pts) $f(x) = \dfrac{\sin x - e^{-x}\ln(x+1)}{1+x}$

(1) $DL_3(0)$: Au $v(0)$ on a :

$$\begin{cases} \sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3) & (0{,}25) \\ e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3) & (0{,}25) \\ \ln(x+1) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3) & (0{,}25) \\ \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3) & (0{,}25) \end{cases}$$

$$e^{-x}\ln(x+1) = \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$$
$$= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \quad (0{,}5)$$

$$\sin x - e^{-x}\ln(x+1) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right)$$
$$= \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3 + o(x^3) \quad (0{,}5)$$

D'où,
$$f(x) = \frac{\sin x - e^{-x}\ln(x+1)}{1+x} = (1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3))\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3 + o(x^3)\right)$$
$$= \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^3 + o(x^3)$$
$$= \frac{3}{2}x^2 - 3x^3 + o(x^3) \quad (2)$$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-e^x \sin x + \ln(x+1)}{x^2(x+1)e^x} = \dfrac{0}{0}$ F.I

$$\frac{-e^x\sin x + \ln(x+1)}{x^2(x+1)e^x} = \frac{-e^x\left[\sin x - e^{-x}\ln(x+1)\right]}{e^x\, x^2\,(x+1)}$$
$$= \frac{-1}{x^2}\left(\frac{\sin x - e^{-x}\ln(x+1)}{x+1}\right)$$
$$= \frac{-1}{x^2} f(x) \quad (1)$$
$$= \frac{-3}{2} + 3x + o(x)$$

Il en résulte, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-e^x\sin x + \ln(x+1)}{x^2(x+1)e^x} = \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{-3}{2} + 3x\right)$
$$= \frac{-3}{2} \quad (1)$$

Exercice 02 : (04 pts) on pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(k+\sqrt{n^2+k^2}\right)-\ln n\right]$

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+\sqrt{n^2+k^2}}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}+\sqrt{\frac{n^2+k^2}{n^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}+\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad 0,5$$

où $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, définie et continue sur $\mathbb{R}$ (car $D_f = \mathbb{R}$). Par suite, Riemann intégrable sur $[0,1]$ 0,5

D'après les sommes de Riemann on aura :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx \quad 0,5$$

on pose $\begin{cases} u = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \\ dv = dx \end{cases}$ 0,5 $\Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ v = x \end{cases}$ 0,5

$$\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx = \left[x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \quad 0,5$$

$$= \left[x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}\right]_0^1$$

$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{2}-1\right)$$

Il en résulte, $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1-\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ 1

Exercice 03 (10 pts) $f(t) = \frac{1+t+t^2}{(t+1)(t^2+4t+5)}$

1) (a) Décomposition en éléments simples :

$$f(t) = \frac{a}{t+1} + \frac{bt+c}{t^2+4t+5} \quad 0,5$$

$$= \frac{at^2+4at+5a+bt^2+ct+bt+c}{(t+1)(t^2+4t+5)}$$

$$= \frac{(a+b)t^2+(4a+c+b)t+5a+c}{(t+1)(t^2+4t+5)}$$

par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a+b = 1 \quad \ldots (1) \\ 4a+b+c = 1 \quad \ldots (2) \\ 5a+c = 1 \quad \ldots (3) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = 1-a \\ 4a+1-a+1-5a = 1 \\ c = 1-5a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 - a \\ -2a = -1 \\ c = 1 - 5a \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/2 & (0,5) \\ b = 1/2 & (0,5) \\ c = -3/2 & (0,5) \end{cases}$$

D'où, $f(t) = \dfrac{1}{2(t+1)} + \dfrac{t-3}{2(t^2+4t+5)}$ (0,25)

(b) $\displaystyle\int f(t)\,dt = \int \frac{dt}{2(t+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{(t-3)\,dt}{t^2+4t+5}$

$\displaystyle\int \frac{dt}{2(t+1)} = \frac{1}{2}\ln|t+1| + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$ (0,5)

$\displaystyle\int \frac{(t-3)\,dt}{t^2+4t+5} = \int \frac{(t-3)\,dt}{t^2+4t+4+1} = \int \frac{(t-3)\,dt}{(t+2)^2+1}$ (0,5)

On pose $x = t+2$ (0,5) $\Rightarrow (dx = dt)$ (0,25)

$\displaystyle\int \frac{(t-3)\,dt}{t^2+4t+5} = \int \frac{(x-2-3)\,dx}{x^2+1} = \int \frac{x\,dx}{x^2+1} - 5\int \frac{dx}{x^2+1}$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\,\mathrm{arctg}\,x + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}$ (0,5) (0,5)

$\displaystyle = \frac{1}{2}\ln(t^2+4t+5) - 5\,\mathrm{arctg}(t+2) + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}$

D'où, $\displaystyle\int f(t)\,dt = \frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{4}\ln(t^2+4t+5) - \frac{5}{2}\,\mathrm{arctg}(t+2) + C$

2) Calcul $\displaystyle I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1+\sin x)(1+\cos x)}$

On pose $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ (0,25) $\Rightarrow x = 2\,\mathrm{arctg}\,t$. $\begin{cases} x \to 0 \Rightarrow t \to 0 \\ x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \to 1 \end{cases}$ (0,25)

$dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$ (0,25) $\quad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ (0,25) $\quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ (0,25)

$$I = \int_0^1 \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int_0^1 \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\left(\frac{t^2+2t+1}{t^2+1}\right)\left(\frac{2}{1+t^2}\right)}$$

$$= \int_0^1 \frac{1+t^2}{(1+t)^2}\,dt \quad (1)$$

$$\frac{1+t^2}{(1+t)^2} = \frac{t^2+2t+1-2t}{(t+1)^2} = \frac{(t+1)^2-2t-2+2}{(t+1)^2} = 1 - \frac{2}{t+1} + \frac{2}{(t+1)^2} \quad (0,75)$$

$$I = \int_0^1 dt - 2\int_0^1 \frac{dt}{t+1} + 2\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} = \left[t - 2\ln|t+1| - \frac{2}{t+1}\right]_0^1$$

$$= 2 - 2\ln 2 \quad (1)$$