Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Université A. Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

1ère année MI
2018/2019
Durée : 1h et 30 min

EXAMEN D'ANALYSE II

Appareils électroniques et documents sont interdits.
Il est conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer à répondre.

Exercice 1. (05 *pts*)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & si\ x \leq 0, \\ \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} & si\ x > 0. \end{cases}$$

1) *Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.*
2) *La fonction f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R})$?*

Exercice 2. (05 *pts*)

1) *Calculer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction g définie par*

$$g(x) = \sqrt{1 + \ln(1+x)} - e^{\frac{x}{2}} + 1 - \cos x.$$

2) *En déduire* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{g(x)}{\sin^3 x}$.

Exercice 3. (05 *pts*)

A l'aide des sommes de Riemann d'une fonction convenable, calculer la limite de la suite réelle, dont le terme général est donné ci-dessous

$$U_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k. \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Exercice 4. (05 *pts*)

On considère les intégrales :

$$I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x\, dx \text{ et } J = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\, dx.$$

1) *Calculer $I + J$.*
2) *Calculer $I - J$.*
3) *En déduire I et J.*

Date: **Samedi 29 Juin 2019.**

Corrigé d'Analyse II

Solution 1.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

1-a) Étude de la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

a-1) Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, la fonction f est continue (car soustraction de deux fonctions continues). (0,5)

a-2) La continuité de f en 0. On a $f(0) = 0$.

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \left(1 - e^{x}\right) = 0 = f(0) \text{ et } \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{e^{x} - 1}{e^{x} + 1} = 0 = f(0).$$ (1)

donc $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, alors f est continue en 0.

a-3) Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction f est continue, (car rapport de deux fonctions continues). D'où la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. (0,5)

1-b) Étude de la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$

b-1) Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, la fonction f est dérivable (car soustraction de deux fonctions dérivables) (0,5)

b-2) La dérivabilité de f en 0. On a

$$f'_g(0) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1 - e^{x}}{x} = -1 \text{ et } f'_d(0) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{e^{x} - 1}{x\left(e^{x} + 1\right)} = \frac{1}{2}.$$ (1)

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$, donc f n'est pas dérivable en 0

b-3) Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction f est dérivable (car rapport de deux fonctions dérivables). (0,5)

2) La fonction f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R})$? La fonction f n'est pas dérivable en 0, donc f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R})$. (1)

Solution 2.

1) Rappelons

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) \text{ et } \sqrt{1 + y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{16} + o\left(y^3\right).$$

(0,5) (0,5)

Donc on aura

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + \ln(1 + x)} &= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{8}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^3 + o\left(x^3\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{8}\left(x^2 - x^3\right) + \frac{1}{16}x^3 + o\left(x^3\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{3x^2}{8} + \frac{17}{48}x^3 + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

(1)

On a

$$e^{\frac{x}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48} + o\left(x^3\right) \text{ et } 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right).$$

(0,75) (0,75)

donc

$$g(x) = \sqrt{1+\ln(1+x)} - e^{\frac{x}{2}} + 1 - \cos x = \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right).$$ 0,5

2)Par ailleurs

$$\sin x = x + o\left(x^2\right) \Longrightarrow \sin^3 x = x^3 + o\left(x^3\right).$$ 1

D'où

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^3 x}\left(f(x) - e^{\frac{x}{2}} + 1 - \cos x\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)}{x^3 + o\left(x^3\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)}{x^3\left(1 + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)}{\left(1 + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$ 1

Solution 3.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *intégrable sur* $[a,b]$. *On rappelle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

On a

$$U_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k.\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}.\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Posons $[a,b] = [0,1]$, *donc*

0,5

$$a_k = a + k\frac{b-a}{n} = \frac{k}{n}.$$ 0,5

On a

$$f(a_k) = f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}.\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Posons $\frac{k}{n} = t$, *donc,* $f(t) = t\sin(\pi t)$. *Comme* f *est continue sur* $[0,1]$, *donc* f *est intégrable sur* $[0,1]$. *D'où*

0,5 0,5

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}.\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \int_0^1 t\sin(\pi t)\,dt,$$ 1

Pour calculer cette intégrale, on intègre par parties

$$\int_0^1 t\sin(\pi t)\,dt = \left[-\frac{1}{\pi}t\cos(\pi t)\right]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi t)\,dt = \frac{1}{\pi}.$$ 2

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{\pi}.$$

Solution 4.

1) Calcul de $I+J$. On a

$$I+J=\int_0^\pi e^x dx=[e^x]_0^\pi=e^\pi-1.$$ (1)

2) Calcul de $I-J$. On a

$$I-J=\int_0^\pi e^x\left((\cos x)^2-(\sin x)^2\right)dx=\int_0^\pi e^x\cos 2x dx.$$ (0,5)

Pour calculer cette intégrale, on intègre par parties deux fois on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^x\cos 2x dx &= \left[\frac{1}{2}e^x\sin 2x\right]_0^\pi-\frac{1}{2}\int_0^\pi e^x\sin 2x dx\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^\pi e^x\sin 2x dx \ (1^{\text{ère}}\ \textit{intégration par parties})\\ &= \left[\frac{1}{4}e^x\cos 2x\right]_0^\pi-\frac{1}{4}\int_0^\pi e^x\cos 2x dx\ \ (2^{\text{ème}}\ \textit{intégration par parties})\\ &= \frac{1}{4}(e^\pi-1)-\frac{1}{4}\int_0^\pi e^x\cos 2x dx,\end{aligned}$$

(0,5) (0,5)

donc

$$\int_0^\pi e^x\cos 2x dx=\frac{e^\pi-1}{5}.$$

D'où

$$I-J=\frac{e^\pi-1}{5}.$$ (0,5)

3) On en déduit que

$$I=\frac{3e^\pi-3}{5}\ \textit{et}\ J=\frac{2e^\pi-2}{5}.$$

(1) (1)