Université de M'hamad Bougara de Boumerdès
Faculté des Sciences
Deuxième Année Master
Recherche Opérationnelle
Département de Mathématiques
Responsable du Module:
Mr. M. BEZOUI

Durée: 1H30'

Semestre 03

Corrigé Examen de Final de Théorie des Jeux

Barème: Exo1: 07pt=1+2+1+(1+1+1); Exo2: 08pt=2+2+1+2+1 Exo3: 05pt=1+2+2

Exercice N°01

On considère un jeu de tirs aux buts simplifié tel que le tireur et le gardien ont simplement deux stratégies: gauche et droite. La règle du jeu est la suivante. Lorsque le gardien choisit le même coté que le tireur, le gardien gagne. Lorsque le gardien choisi le coté inverse du tir, le tireur gagne. Lorsqu'un joueur gagne son gain est de un point (+1) et lorsqu'il perd, la perte est de un point (-1).

1. Représentez ce jeu sous forme d'un jeu stratégique.

		Tireur	
		G	D
Gardien	G	(**1**,-1)	(-1,**1**)
	D	(-1,**1**)	(**1**,-1)

2. Déterminer l'équilibre(s) de Nash en stratégies pures?
   Il n'existe pas d'équilibre de Nash en stratégie pure.

3. Calculer l'équilibre de Nash en stratégie mixte.

$$q-(1-q)=-q+(1-q)\Longrightarrow q-1+q=-q+1-q\Longrightarrow q=\frac{1}{2}$$
$$-p+(1-p)=p-(1-p)\Longrightarrow -2p+1=2p-1\Longrightarrow p=\frac{1}{2}$$

   Alors l'équilibre de Nash en SM est $(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

4. Ce jeu est-il un jeu à somme nulle? (Justifier)
   Oui, c'est un jeu à somme nulle, parce que la somme des gains de chaque issue est nulle.

   (a) Si oui,

   i. Représentez le jeu sous forme de jeu matriciel?
   $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

   ii. Trouvez l'équilibre(s) de Nash, en stratégie pure, en stratégie mixte. Ainsi que la valeur du jeu.
   $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ En rouge, le raisonnement du gardien, en vert le raisonnement du tireur. comme il n y'a pas d'intersection, on dit alors, que ce jeu n'a pas de solution stratégie pure.

   iii. **Tracez le graphe de meilleurs réponses.**

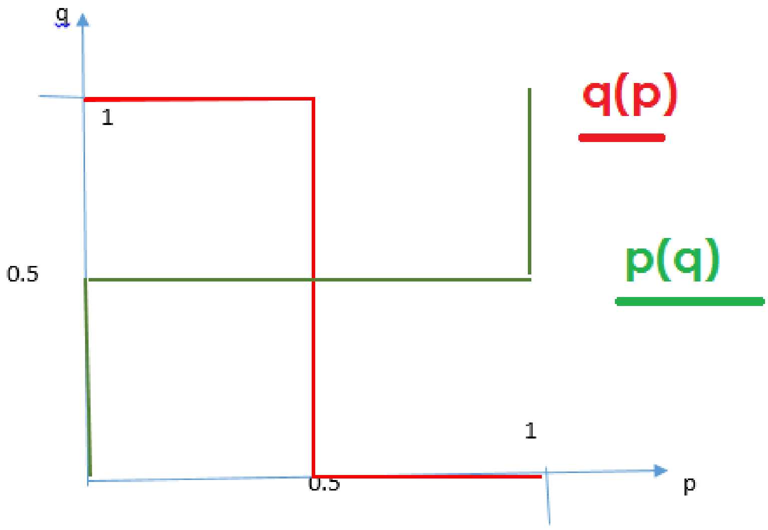


Figure 1: Graphe des meilleurs réponses

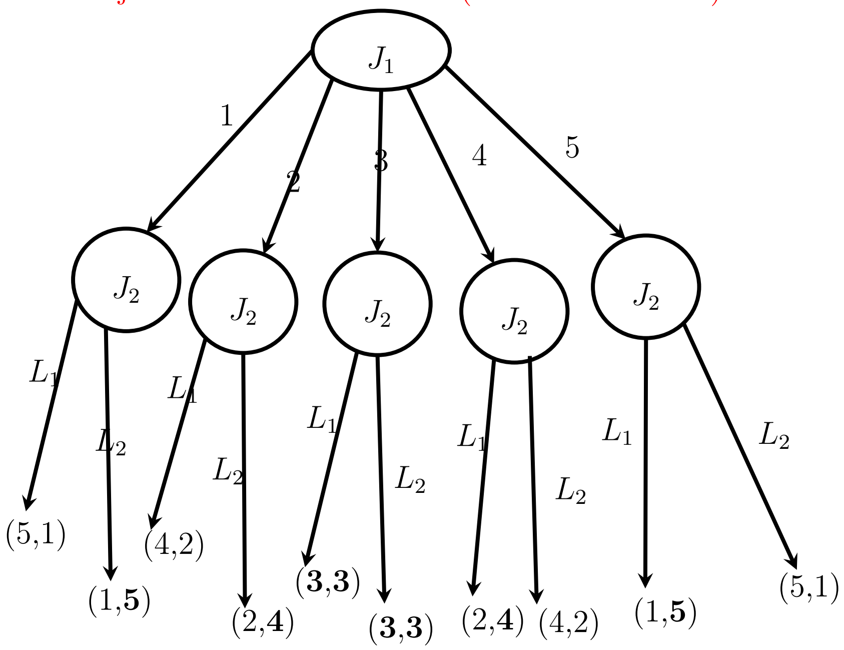
Exercice N02

Dans cet exercice, on suppose que les fonctions de gains sont connues de tous les joueurs.

1. Deux joueurs cherchent à se partager un gâteau composé de 6 parts de même taille numérotées de 1 à 6. La procédure est la suivante: le joueur 1 choisit un entier $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et partage les parts en deux lots, le lot L_1 contenant les parts numérotées de 1 à x, et le lot L_2 contenant les parts numérotées de $x + 1$ à 6. Le joueur 2 observe le choix du joueur 1 et choisit $y \in \{L_1, L_2\}$ et remporte le lot correspondant, tandis que le joueur 1 remporte l'autre lot.

   Exemple: *si le joueur 1 choisit* $x = 4$ *alors* L_1 *est formé des parts: {1,2,3,4}, le lot* L_2 *sera formé de* $\{5, 6\}$*,Le joueur 2 a le choix entre* L_1 *et* L_2*, s'il choisit le lot* L_1*, alors le joueur 1 aura le lot* L_2*.*

   (a) Écrire le jeu sous forme extensive (Arbre de décision).

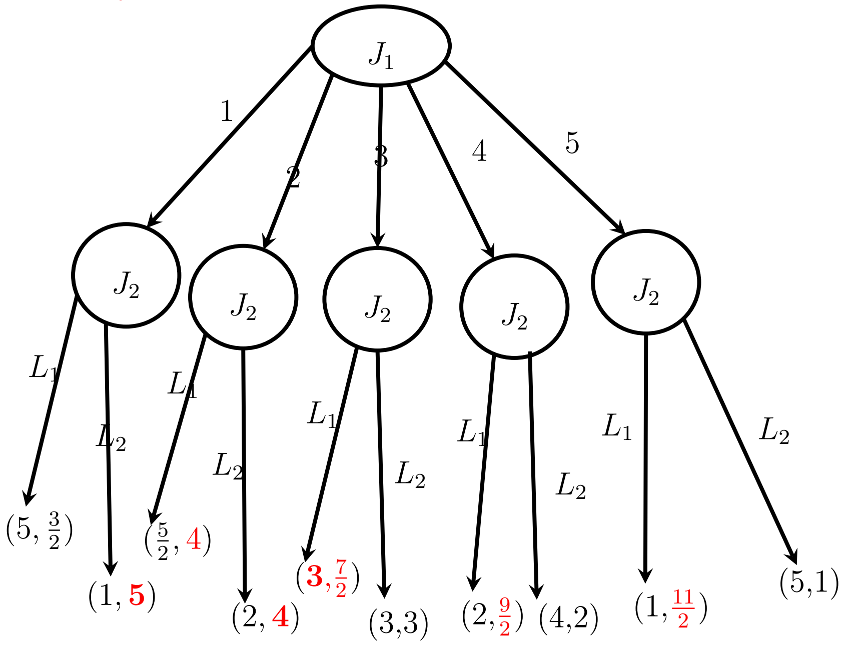
   (b) Déterminer tous les équilibres sous-jeux parfaits en stratégies pures.
   L'équilibre Parfait en Sous Jeux est: $(3, L_2L_2L_2L_1L_1)$ et $(3, L_2L_2L_1L_1L_1)$.

   (c) Combien chaque joueur a t-il de stratégies dans la forme normale (stratégique) associée. Le joueur 1 a 5 stratégie, le joueur 2 a $2^5 = 32$.

2. Dans cette partie on suppose toujours que le Joueur 2 observe l'action choisie par le Joueur 1 avant de choisir son action, mais il y a désormais une cerise sur la part numéro 1. Le joueur 2 est friand de

cerise: son gain est égal à la proportion de gâteau obtenue plus un bonus de $\frac{1}{2}$ s'il obtient la cerise. Le joueur 1 n'aime pas la cerise et la jette s'il l'obtient. Son paiement est juste la proportion de gâteau obtenue.

(a) Écrire le jeu sous forme extensive.



(b) Déterminer tous les équilibres en sous-jeux parfaits.
L'équilibre Parfait en Sous Jeux est: $(3, L_2L_2L_1L_1L_1)$.

Exercice N03

Considérons le jeu suivant:

		Joueur 2			
		e	f	g	h
	a	(0,0)	(4,1)	(2,0)	(5,0)
Joueur 1	b	(1,4)	(3,3)	(2,2)	(2,1)
	c	(0,2)	(2,2)	(1,1)	(8,1)
	d	(0,5)	(2,2)	(1,1)	(1,2)

1. Éliminer de manière itérative les stratégies strictement dominées.
   $b \succ d \Rightarrow [f \succ (g\ et\ h)] \Rightarrow (b \succ c)$.

   Le Tableau réduit est alors:

		Joueur 2	
		e	f
	a	(0,0)	**(4,1)**
Joueur 1	b	**(1,4)**	(3,3)

2. Déterminer le(s) équilibre(s) de Nash en stratégie pure et mixte.
   Les équilibres de Nash en Stratégie Pure sont: (a, f) et (b, e).
   L'EN en stratégie mixte est;
   $(0.q + 4.(1-q)) = (1.q + 3.(1-q)) \Longrightarrow -2q = -1 \Longrightarrow q = \frac{1}{2}$.
   $(0.p + 4.(1-p)) = (1.p + 3.(1-p)) \Longrightarrow p = \frac{1}{2}$.
   L'équilibre de Nash en stratégie mixte est alors: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

3. Représentez graphiquement ces équilibres et les correspondances de meilleures réponses en stratégies mixtes des joueurs.

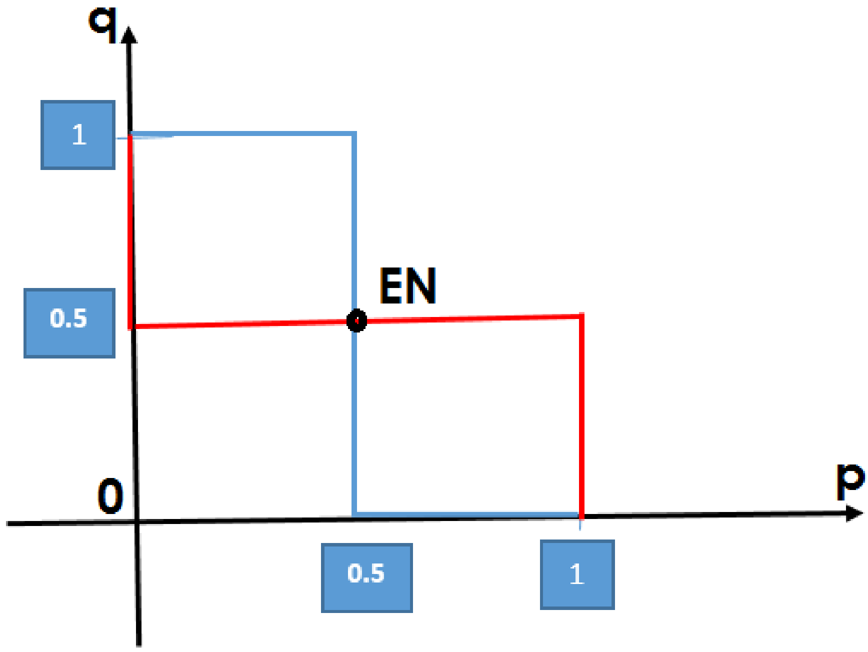


Figure 2: Correspondances de meilleures réponses