Université de M'hamad Bougara de Boumerdès

Faculté des Sciences
Deuxième Année Master
Recherche Opérationnelle

Département de Mathématiques
Responsable du Module:
Mr. M. BEZOUI

Série de Travaux Dirigés N° 01 en Théorie des jeux

Exercice 1. On pose $X = Y = [0, 1]$, soit $u : X \times Y \to \Re, (x, y) \mapsto x + y - 1$.

- Calculer $\sup_x \inf_y u(x, y)$ et $\inf_y \sup_x u(x, y)$.
- Y a-t-il un point selle?
- Même questions pour $u : (x, y) \mapsto 1 - (x - y)^2$

$$u : (x, y) \mapsto \begin{cases} 2x - 1 & \text{si x<y} \\ 1 - 2y^2 & \text{si x>y} \\ x - y^2 & \text{si x=y} \end{cases}$$

Exercice 2.
Trouver le minima(InfSup), maxima (SupInf) et le point selle (saddle Point) pour les fonctions suivantes:

* $a(x, y) = 3x^3 + 3 * x^2 y - y^3 - 15x$
* $b(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$
* $c(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$
* $d(x, y) = x^3 - 4xy + 2y^2$
* $e(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2^2$

```
syms x y
f=inline('3*x^3+3*x^2*y-y^3-15*x');
E=[-10:0.3:10];EE=E;
for i=1:length(E)
    FF=[];
    for j=1:length(E)
        FF=[FF f(E(i),E(j))];
    end
    F(i,:)=FF;
end
mesh(E,EE,F)
```

1. Illustrez ces fonctions sur Matlab en utilisation la fonction Mesh et vérifiez votre réponse.

Exercice 3. On considère un jeu de tirs aux buts simplifié tel que le tireur et le gardien ont simplement deux stratégies: gauche et droite. La règle du jeu est la suivante. Lorsque le gardien choisit le même coté que le tireur, le gardien gagne. Lorsque le gardien choisi le coté inverse du tir, le tireur gagne. Lorsqu'un joueur gagne son gain est de un point (+1) et lorsqu'il perd, la perte est de un point (-1).

1. Quelle est la classe de ce jeu?
2. Représentez ce jeu sous forme d'un jeu stratégique.
3. Déterminer l'équilibre(s) de Nash en stratégies pures?

Exercice 4. Alice et Bob ont le même ordinateur portable. Malheureusement, les deux ordinateurs ont été volés. L'assurance veut leur rembourser au juste prix et propose la règle suivante. Alice et Bob doivent annoncer chacun la valeur estimée de leur ordinateur. Les choix sont faits simultanément. Soit x la valeur annoncée par Alice et y la valeur annoncée par Bob.

- Si $x = y$, alors chacun reçoit cette somme.

- Si $x < y$, alors Alice reçoit $x + 2$ et Bob reçoit $x - 2$.
- Si $x > y$, alors Alice reçoit $y - 2$ et Bob reçoit $y + 2$.

On suppose que les valeurs annoncées doivent être choisies parmi les nombres entiers compris entre 2 et 6.

1. Quelle est la classe de ce jeu?
2. Écrire la matrice de ce jeu.
3. Montrer que $(2, 2)$ est le seul équilibre de Nash (pur ou mixte). Indications: Le montrer d'abord en pur. Montrer ensuite que la stratégie 6 est forcément jouée avec probabilité zéro dans un équilibre mixte. Conclure en poursuivant ce raisonnement.
4. On suppose maintenant qu'Alice joue avant Bob : Alice choisit x, l'annonce à Bob, qui choisit alors y. Résoudre ce jeu par backward induction et comparer avec l'équilibre de Nash du jeu simultané.

Exercice 5. On note :

$$T = \{(x, y) \in N : x + y \leq 5\},$$

où N est l'espace des entiers naturels. Deux joueurs doivent se mettre d'accord sur un point de T, sachant que l'abscisse correspond au paiement du joueur 1, l'ordonnée correspond au paiement du joueur 2, et qu'en cas de désaccord le paiement de chaque joueur sera nul. Plus précisément, on considère l'interaction suivante. Simultanément, le joueur 1 choisit un entier naturel x et le joueur 2 choisit un entier naturel y. Les valeurs de x et y peuvent être n'importe quels entiers naturels. Si $(x, y) \in T$, alors le paiement du joueur 1 est x et celui du joueur 2 est y. Si $(x; y) \notin T$, alors le paiement de chaque joueur est nul. (Ces règles sont connues des deux joueurs.)

- Quelle est la classe de ce jeu?
- Modéliser ce problème par un jeu sous forme stratégique $J = \langle I; \{X_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$.
- Proposer une autre forme de représentation du jeu.

Exercice 6. Soit le jeu suivant, où x est un paramètre inconnu.

	A	B
a	(2,2)	(1,1)
b	(1,1)	(x, x)

1. Mettez ce jeu sous la forme suivante $(J) = (I; (X_i)_{i \in I}; (f_i)_{i \in I})$ (c'est-à-dire, déterminez l'ensemble I des joueurs, les ensembles X_i d'actions, et les fonctions d'utilité f_i).
2. Déterminez tous les équilibres de Nash en stratégies pures de ce jeu, en fonction de la valeur du paramètre x.

Exercice 7. Soit le jeu suivant:

	A	B	C	D
a	(3,2)	(1,4)	(2,3)	(3,2)
b	(0,4)	(2,1)	(2,0)	(2,-1)
c	(2,1)	(0,2)	(1,3)	(0,2)
d	(1,1)	(-1,2)	(3,0)	(-1,3)

1. Montrez que ce jeu se réduit à un jeu dans lequel chaque joueur a deux stratégies par la méthode d'élimination itérée des stratégies strictement dominées.
2. Déterminez tous les équilibres de Nash du jeu réduit.
3. Déterminez tous les équilibres de Nash du jeu initial.