Université A/Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques
2ème année Licence STID.

2019/2020

Série d'exercices N°1 - Statistique inférentielle

Exercice 1

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon aléatoire simple issu d'une variable aléatoire X de moyenne μ et d'écart-type σ. On suppose que la v.a X admet un moment centré d'ordre 4 :

$$\mu_4' = \mathbb{E}(X - E(X))^4.$$

Le moment centré d'ordre 2 (variance empirique) de l'échantillon est :

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

– Montrer que :

$$Var(S^2) = \frac{n-1}{n^3}\left((n-1)\mu_4' - (n-3)\sigma^4\right).$$

Exercice 2

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon aléatoire simple issu d'une variable aléatoire X. les réalisations $x_1, x_2, ..., x_n$ peuvent être réordonnées en $y_1, y_2, ..., y_n$ où $y_1 < y_2 < ... < y_n$. Les y_i constituent une permutation particulière des x_i. Les y_i sont des réalisations du n-uplet de variables aléatoires $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ qui constitue l'échantillon ordonné de X.

1. Calculer la loi de $Y_n = \sup_{1\le i\le n} X_i$.
2. Calculer la loi de $Y_1 = \inf_{1\le i\le n} X_i$.
3. Déterminer la loi du couple (Y_1, Y_n). En déduire celle de l'étendue $R = Y_n - Y_1$.
4. Soit N_z le nombre de X_i inférieurs à z. Quelle est la loi de N_z?

Exercice 3

Pour les modèles suivants, donner la vraisemblance associé à l'observation d'un échantillon aléatoire simple $(X_1, ..., X_n)$.

1. Modèle gaussien.
2. Modèle uniforme.
3. Modèle exponentiel.