Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Université de Béjaïa

Méthodes de Monte-Carlo

Master1 PSA: 2019–2020

Série de TD Numéro: 0

Exercice 1. *(Loi de Cauchy) On rappelle que X suit une loi de Cauchy standard si elle a pour densité :*

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

1. *Grâce à la méthode d'inversion, donner un moyen simple de simuler une telle loi.*
2. *Donner l'algorithme de simulation de cette loi.*
3. *Donner le programme Matlab de simulation de cette loi.*

Exercice 2. *Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F :*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x > 0 \\ \frac{1}{2}x & si \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} & si \quad \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

1. *Calculer le pseudo-inverse de F.*
2. *Proposer une méthode de simulation à X.*
3. *Donner le programme matlab associé à cette méthode.*

Exercice 3. *Soient x_m et α deux réels strictement positifs. Déterminer la densité de la variable :*

$$X = \frac{x_m}{U^{\alpha^{-1}}}$$

où U suit une loi uniforme sur $[0,1]$. On dit que X suit une loi de Pareto de paramètres (x_m, α).

Exercice 4. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on définit la densité f par :*

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{-(\frac{x^2}{2})} 1_{x>0}$$

1. *Pour $\alpha > 0$ fixé, trouver une constante $m_\alpha > 1$ telle que :*

$$f(x) \leq m_\alpha e^{-\alpha x}$$

2. *En déduire une méthode de simulation de la loi de densité f.*
3. *Trouver α qui minimise le temps moyen de calcul dans la méthode proposée pour simuler f*

Exercice 5. *Soient*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{T} e^{-x^4} \mathbb{1}_{x\geq 0} \\ g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{x\geq 0}, \quad \sigma > 0 \\ h(x) &= \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x\geq 0}, \qquad \lambda > 0 \end{aligned}$$

avec $T = \int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx$.

1. *Trouver une constante m telle que $m \times g$ soit une densité.*
2. *Trouver une constante $m_1 > 1$ telle que :*

$$f(x)/mg(x) \leq m_1.$$

3. *Trouver σ minimisant la probabilité de rejet.*
   Dans la suite, on prendera $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$
4. *Trouver une constante $m_2 > 1$ telle que :*

$$mg(x)/h(x) \leq m_2.$$

5. *Trouver λ minimisant la probabilité de rejet.*

6. *Proposer deux méthodes différentes de simulation de mg et donner le programme d'une des deux méthodes.*
7. *On veut mettre en place une méthode de rejet pour simuler la loi de densité f en utilisant la densité mg ou la densité h. Laquelle vaut-il mieux choisir ? Donner l'algorithme de cette méthode.*

Exercice 6. *Supposons que l'on veuille simuler la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ en utilisant comme proposition une loi de Laplace de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire de densité :*

$$g(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}.$$

1. *Déterminer la valeur de λ qui permet de minimiser la probabilité de rejet.*
2. *Proposer une méthode de simulation de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ basée sur la méthode de rejet et écrire le programme associé a cette dernière.*

Simulation des loi conditionnelles.

Supposons que l'on veuille simuler un couple aléatoire (X, Y). Si les deux variables sont indépendantes, il suffit de simuler X et Y indépendamment. Dans le cas contraire, si X est facilement simulable et si la loi de Y sachant X l'est aussi : il suffit de simuler x selon $L(X)$ puis y selon la loi conditionnelle $L(Y|X = x)$. Dans le cas de variables à densité, ceci est tout simplement basé sur le fait que $f(x, y) = f(x)f(y|x)$.

Exercice 7. *Soit le couple de v.a (X, Y) de densité :*

$$f(x, y) = yx^{y-1}e^{-y}1_{y>0}1_{0<x<1}.$$

1. *Quelle est la loi de Y ?*
2. *Déduire la loi de X sachant $Y = y$, puis $P(X \leq x | Y = y)$.*
3. *Proposer une méthode de simulation du couple (X, Y).*

Exercice 8. *On considère le couple (X, Y) de densité :*

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{y^2 x}{2}} e^{-\sqrt{x}} 1_{x>0}.$$

1. *Quelle est la loi de Y sachant $X = x$?*
2. *Quelle est la loi de $\sqrt{x}$?*
3. *En déduire une méthode de simulation du couple (X, Y).*