Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Université de Béjaïa
Méthodes de Monte-Carlo

Master1 PSA : 2019–2020

Série de TD Numéro: 1

Exercice 1. *Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$. On veut calculer :*

$$I = E\left[e^X 1_{X \geq -1}\right].$$

1. *Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer I de manière approchée.*
2. *Estimer la variance de la méthode.*

Exercice 2. *Soit la quantité :*

$$I = \int_2^4 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx$$

1. *Donner au moins deux méthodes de Monte-Carlo d'approximation de cet intégrale.*
2. *Écrire un programme en Matlab qui calcule I (de manière approchée).*

Exercice 3. *Soit la quantité :*

$$I = \int_0^1 \cos(x^3) e^{(-x)} dx$$

1. *Donner au moins deux méthodes de Monte-Carlo d'approximation de cet intégrale.*
2. *Écrire un programme en Matlab qui calcule I (de manière approchée).*

Exercice 4. *Soit la quantité :*

$$I = \int_0^{+\infty} x^{3/2} e^{-x} dx$$

1. *Proposer deux méthodes différentes de Monte-Carlo pour calculer I (de manière approchée).*
2. *Écrire un programme qui implémente cette méthode.*

Exercice 5. *(Examen rattrapage 2017)*
Soit :

$$I = \int_0^{+\infty} x e^{(-x-\frac{x^2}{2})} dx$$

1. *Donner deux méthodes de Monte-Carlo différentes pour calculer I (de manière approchée).*
2. *Écrire un programme Matlab qui permet de simuler la variance d'une des deux méthodes.*

Exercice 6. *(Examen 2016)*
Soit la quantité :

$$I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}\ ln(x)} dx, \ \ a > 0.$$

1. *Donner une manière de calculer I (de manière) approchée par une méthode de Monte-Carlo.*
2. *On notera σ^2 la variance de cette méthode. Trouver un nombre de boucles n (qui s'écrit comme une fonction de σ^2 telle que la méthode ci-dessus approche I à* 0.02 *près avec une probabilité* ≥ 0.95.

Exercice 7. *Soit :*

$$I = \int_0^1 \sin(\sqrt{x}) dx$$

1. *Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer I (de manière approchée).*
2. *Écrire un programme en Matlab qui calcule I.*
3. *Trouver un nombre de boucle n (qui s'écrit comme une fonction de σ^2 telle que la méthode ci-dessus approche I à* 0.01 *près avec une probabilité* 0.9.

Exercice 8. *Soit la quantité :*

$$I = \int_0^2 \int_0^1 \frac{\sin(x)\sin(y)}{\sqrt{xy}} dxdy$$

1. *Montrer que I est bien définie (i.e $E[\frac{\sin(X)\sin(Y)}{\sqrt{XY}}] < +\infty$).*
2. *Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer I.*
3. *Écrire le programme Matlab correspondant.*

Exercice 9. *(Examen 2017)*
Soit la quantité :

$$I = \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-2x} dx.$$

1. *Donner deux méthodes différentes de Monte-Carlo pour calculer I (de manière approchée).*
2. *On notera σ^2 la variance d'une des deux méthodes (méthode de votre choix). Trouver un nombre de boucles n telle que la méthode ci-dessus approche I à* 0.02 *près avec une probabilité* ≥ 0.95

Exercice 10. *(Examen de rattrapage 2016)*
Soient X, Y et Z indépendantes et de même loi,$X \sim \mathcal{U}([0;4])$. On veut calculer

$$I = \mathbb{E}\left[\frac{\sin(X)\cos(Y)\sin^2(Z)}{\sqrt{XYZ}}\right]$$

1. *Montrer que I est bien définie.*
2. *Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer I de manière approchée.*
3. *Écrire le programme Matlab correspondant.*
4. *Écrire un programme qui estime la variance de cette méthode.*