Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Université de Béjaïa

Méthodes de Monte-Carlo

Master1 PSA: 2019–2020

Série de TD Numéro: 2

Exercice 1. *(examen 2016)*
Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$. On veut calculer :

$$I = E\left[\sqrt{|X_1|}\right].$$

1. *Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer I de manière approchée.*
2. *Ecrire un programme qui permet d'éstimer la variance de cette méthode.*
3. *Proposer deux méthodes différentes de réduction de variance pour le calcul de I.*
4. *Écrire un programme qui implémente une des deux méthodes.*
5. *Écrire un programme qui éstime la nouvelle variance.*

Exercice 2. *Soit la quantité :*

$$I = \int_0^{+\infty} exp(-x^4 - \frac{x^2}{2})dx$$

1. *Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer I.*
2. *Proposer une méthode de réduction de variance par variable de contrôle.*
3. *Écrire un programme en Matlab qui calcule I par Monte-Carlo en utilisant cette réduction de variance.*

Exercice 3. *Soit la quantité :*

$$I = \int_0^{+\infty} x^{3/2} e^{-x} dx$$

1. *Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer I (de manière approchée).*
2. *Proposer une méthode de réduction de variance par variable de contrôle.*
3. *Écrire un programme qui implémente cette nouvelle méthode.*

Exercice 4. *(rattrapage 2017)*

Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$. On veut calculer :

$$J = E\left[e^{|X|^{\frac{1}{3}}} 1_{X \geq 1}\right].$$

1. *Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer J de manière approchée.*

2. *Proposer deux méthodes différentes de réduction de variance pour le calcul de J.*
3. *Écrire un programme qui implémente une des deux méthodes.*

Exercice 5. *(examen 2017)*

Supposons que l'on veuille approcher la quantité suivante :

$$J = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-(x-2)^4} dx.$$

1. *Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer J de manière approchée.*
2. *Proposer deux méthodes différentes de réduction de variance pour le calcule de J (de manière approché).*
3. *Écrire un programme qui implémente une des deux méthodes.*
4. *Écrire un programme qui éstime la nouvelle variance d'une des deux méthodes.*

Exercice 6. *(rattrapage 2016) On s'intéresse à la quantité suivante :*

$$I = \int_{-1}^{+\infty} e^{2x-x^2} dx.$$

1. *Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer I de manière approchée.*
2. *Proposer deux méthodes différentes de réduction de variance pour le calcul de I.*
3. *Écrire un programme qui implémente une des deux méthodes.*
4. *Écrire un programme qui éstime la nouvelle variance.*

Exercice 7. *(rattrapage 2018)*
Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ une suite de v.a.i.i.d, $X_1 \sim exp(1)$. Soit la quantité,

$$I = E[\varphi(X)];$$

avec

$$\varphi(X) = X^{\frac{3}{2}}.$$

1. *Proposer une méthode Monte-Carlo pour estimer la quantité I.*
2. *Donner le programme matlab qui permet d'éstimer cette quantité.*
3. *Montrer que, pour toute fonction $g(x) = -log(1 - e^{-x})$;*

$$E[\varphi(g(X))] = E[\varphi(X)].$$

4. *Monter que var $\left[\frac{\varphi(X)+\varphi(g(X))}{2}\right] <$ var $[\varphi(X)]$*
5. *En déduire une méthode de réduction de variance Monte-Carlo.*
6. *Proposer une méthode de réduction de variance par variable de contrôle.*
7. *Proposer une méthode de réduction de variance par échantillonnage préférenciel.*
8. *Donner le programme Matlab de l'une des trois méthodes de réduction de variance pour estimer la quantité I.*