جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Université de Béjaïa

Méthodes de Monte-carlo

Master 1 PSA : 2019–2020

Corrigé du Devoir 1

==

Nous avons :

$$f(x,y) = \frac{x}{2\sigma\pi} e^{-\frac{x^2y^2}{2}+x^2y-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, x, y \in \mathbb{R}.$$

1) La loi de X)

La densité $f(x)$ s'obstient en marginalisant $f(x,y)$ par rapport à y ;

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{2\sigma\pi} e^{-\frac{x^2y^2}{2}+x^2y-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2y^2}{2}+x^2y-\frac{x^2}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{(y-1)}{\frac{1}{x}})^2} dy$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

car $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{(y-1)}{\frac{1}{x}})^2} dy = 1$, $\frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{(y-1)}{\frac{1}{x}})^2} \sim \mathcal{N}(1, \frac{1}{x^2})$

d'où $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

2) La loi de Y sachant $X = x$

La densité conditionnelle est donée à partir de la relation suivante :

$$f(y\backslash x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{x}{2\sigma\pi} e^{-\frac{x^2y^2}{2}+x^2y-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2\sigma^2}} / \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{(y-1)}{\frac{1}{x}})^2}$$

d'où la loi de Y sachant $X = x$ est la loi normale $\mathcal{N}(1, \frac{1}{x^2})$.

3)

Nous avons :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$g(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Question (a)

On montre que $\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)dx = 1$.

Nous avons :

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} e^{-|x|} = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$$

Question (b)

Afin de montrer que :

$$f(x) \leq m g(x),$$

on calcul le rapport $f(x)/g(x)$.

Nous avons

$$f(x)/g(x) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}+|x|}.$$

Posons $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}+|x|}$. La fonction $\varphi(x)$ est symétrique, donc on peut limiter l'étude de cette fonction à $\mathbb{R}^+$. Pour tout $x \geq 0$, nous avons

$$\varphi^{'}(x) = (\frac{-x}{\sigma^2} + 1) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}+x}$$

d'ou le tableau de variation de la table 1.

x	$0 \quad \sigma^2 \quad +\infty$
$\varphi^{'}(x)$	$+ \quad 0 \quad -$
$\varphi(x)$	$\nearrow \quad \psi(\sigma^2) \quad \searrow$

Table 1 – Tableau de variation de φ.

D'après le tableau de variation et pour tout $x \geq 0$,

$$\varphi(x) \leq \varphi(\sigma^2)$$

d'ou

$$f(x) \leq m g(x),$$

avec

$$m = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\sigma^2}{2}}.$$

Question (c)

Posons $\chi(\lambda) = \frac{1}{\sigma} e^{\frac{\sigma^2}{2}}$ et minimisons cette fonction.
Nous avons, pour tout $\sigma > 0$,

$$\chi^{'}(\lambda) = (1 - \frac{1}{\sigma^2}) e^{\frac{\sigma^2}{2}}$$

d'où le tableau de variation de $\chi(\sigma)$ donné dans la table 2.

σ	$0 \quad 1 \quad +\infty$
$\chi^{'}(x)$	$- \quad 0 \quad +$
$\chi(x)$	$\searrow \quad \chi(1) \quad \nearrow$

TABLE 2 – Tableau de variation de χ.

D'après ce tableau, la valeur de σ qui permet de minimiser la probabilité de rejet est : $\sigma = 1$.
Question (d)

1. **Méthode 1 :**Nous avons $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R}$, donc on peut proposer une méthode basée sur la simulation d'une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, pour cela ;
   (a) on tire deux suites de v.a.i.i.d, $u, v \sim \mathcal{U}([0; 1])$
   (b) on pose $X(i) = \sigma\sqrt{-2\log(u(i))} cos(2\pi v(i))$
2. **Méthode 2 :**d'après les question (a) et (b), on peut simuler f avec un algorithme de rejet ;
   (a) **Simulation de la loi de densité g :**
   Par l'application de la méthode d'inversion sur la fonction de répartition de g, on trouve :

$$|Z| = -log(u), \ \ u \sim \mathcal{U}([0, 1])$$

   (b) **Le rapport d'acceptation-rejet** $r(z)$
   Le rapport d'acceptation-rejet est donné par :

$$r(z) = e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2} - \frac{\sigma^2}{2} + |z|}.$$

   (c) **Comparaison**
   On tire une suite de v.a $v \sim \mathcal{U}([0, 1])$ et on compare les éléments de cette suites avec lerapport d'acceptation-rejet.

Un des programmes qui permet de simuler $X \sim L(f)$ est le suivant :

Algorithme 1 : Simulation $X \sim L(f)$.

```
     n=input('n=');
     segma=input('segma=');
     u=rand(1,n)
     v=rand(1,n)
     for i=1:n
     X(i)=segma*sqrt(-2*log(u(i))*cos(2*pi*v(i));
     end
end
disp(X)
```

4) Méthode de simulation du couple (X, Y).

D'après les questions (1) et (2) et afin de simuler le couple de variables aléatoires (X, Y) on doit suivre les étapes suivantes :

1. **Etape 1 :** On simule $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ par une des deux méthodes vues précédemment (question 3-d).
2. **Etape 2 :** On simule $Y \sim \mathcal{N}(1, \frac{1}{x^2})$, pour cella
   a) On tire deux suites de v.a $u,\ v \sim \mathcal{U}([0,1])$.
   b) On pose $Z(i) = \sqrt{-2\log(u(i))}cos(2\pi v(i))$.
   c) Pour finir on pose $Y(i) = 1 + \frac{1}{X(i)}Z(i)$.

5) Programme Matlab

Le programme Matlab qui permet de simuler un couple de v.a est donné par,

Algorithme 2 : Simulation du couple (X, Y).

```
    n=input('n=');
    segma=input('segma=');
    u=rand(1,n)
    v=rand(1,n)
    w=rand(1,n)
    x=rand(1,n)
    for i=1:n
    X(i)=segma*sqrt(-2*log(u(i))*cos(2*pi*v(i));
    Z(i)=segma*sqrt(-2*log(w(i))*cos(2*pi*x(i));
    Y(i)=1+(1/X(i))*Z(i);
    end
end
disp(X)
disp(Y)
```