Université A-MIRA - Béjaia
Faculté des sciences exactes
Département de Mathématiques
L 2 Maths

2018-2019

Corrigé d'examen du Module Algèbre 3

Exercice 1

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1°/ - calcul χ_A

$$\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)(1+\lambda)(2+\lambda)+2-2(2+\lambda)$$

$$=(1-\lambda^2)(2+\lambda)+2-4-2\lambda$$

$$=-\lambda^3-2\lambda^2+\lambda+2+2-4-2\lambda$$

$$\chi_A(\lambda)=-\lambda^3-2\lambda^2-\lambda=-\lambda(\lambda^2+2\lambda+1)=-\lambda(\lambda+1)^2$$

$$\boxed{\chi_A(\lambda)=-\lambda(\lambda+1)^2}$$

1

2°/ $\Pi_A(\lambda) = ?$

Π_A divise χ_A et ils ont les mêmes racines

donc il y a deux possibilités :

$\Pi_A(\lambda) = \lambda(\lambda+1)$ ou $\Pi_A(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2$

Si $\Pi_A(\lambda) = \lambda(\lambda+1)$ alors $\Pi_A(A) = 0$ donc

$$A(A+I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \\ \\ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{\Pi_A(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2}$

3°/ $Sp(A) = \{0 \text{ (simple)}, (-1) \text{ double}\}$.

$$SEP(A,0) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, AX = 0 \right\}$$

$$AX = 0 \iff \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases}$$

$$SEP(A,0) = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$SEP(A,-1) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, AX = -X \right\}$

$$AX = -X \iff \begin{cases} -x+2z = -x \\ x-2y = -y \\ -x+y+z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$\boxed{SEP(A,-1) = \left\langle v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

1

4°) $SEC(A,0) = Ker(A - 0I_3)^1 = SEP(A,0) = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

1

$SEC(A,-1) = Ker(A+I_3)^2 =$

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$Ker(A+I)^2 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, (A+I)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$(A+I)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x+2y+4z = 0 \\ -x+y+2z = 0 \\ -x+y+2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = y + 2z$$

$SEC(A,-1) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, x = y + 2z \right\}$

1

$SEC(A,-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

3

qui sont linéairement indépendants

$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$.

$\dim SEC(A_{1}-1) = 2$.

5°/ A n'est pas diagonalisable, donc elle est trigonalisable.

cherchons un troisième vecteur $V_3 \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que (v_1, v_2, v_3) soit libre et

$$\underset{(v_1,v_2,v_3)}{Mat}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ triangulaire.}$$

Prenons un vecteur quelconque de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ qui verifie (v_1, v_2, v_3) libre.

soit par exemple $v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

1

(v_1, v_2, v_3) est libre.

$$A v_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \alpha v_1 + \beta v_2 + v_3$$

$$= \alpha \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

par identification on obtient

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta-1 = -1 \\ \alpha+\beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -1 \text{ on} \\ \beta = 2 \text{ on} \end{cases}$$

d'où $\underset{(v_1,v_2,v_3)}{\mathrm{Mat}(A)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = T$ on

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ on}$$

fin exercice 1

Exercice 2

Calculer u_n, $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+3} + 2u_{n+1} - 3u_{n+2} = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ 0,5 , $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix}$

donc le système $(*)$ peut s'écrire sous la forme matricielle.

$X_{n+1} = AX_n$ 0,25 où 0,5 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$X_n = AX_{n-1} = A^2 X_{n-2} \cdots$

d'où par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ 0,5

on montre que $\boxed{X_n = A^n X_0}$

donc pour déterminer X_n, on doit calculer A^n ?

Calcul de A^4

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

$$\boxed{\chi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}$$ OK

$Sp(A) = \{0, 1, 2\}$. toutes les valeurs sont simples donc A est diagonalisable

$$SEP(A,0) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x \text{ quelconque} \end{cases}$$

$$SEP(A,0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$SEP(A,1) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, AX = X \right\}$$

$$AX = X \iff \begin{cases} y = x \\ z = y \\ -2y + 3z = z \end{cases} \iff x = y = z$$

OK

$SEP(A,1) = \langle v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ 0,1

$SEP(A,2) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, AX = 2X \right\}$

$AX = 2X \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = 2y = 4x \\ -2y + 3z = 2z \end{cases}$

$SEP(A,2) = \left\{ X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \,/\, x \in \mathbb{R} \right\}$

$= \langle v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$ 0,1

d'où $P = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 0,25 ; 0,5 $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = ?$

$\det P = 2$, $P^{-1} = \frac{1}{2} \, {}^tC$

$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tC = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \quad 0{,}1 \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

$$A^n = P D^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$0{,}1$

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2^n \\ 0 & 1 & 2^{n+1} \\ 0 & 1 & 2^{n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 2-2^{n-1} & -1+2^{n-1} \\ 0 & 2-2^n & -1+2^n \\ 0 & 2-2^{n+1} & -1+2^{n+1} \end{pmatrix} \quad 0{,}5$$

d'où $X_n = A^n X_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ / $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2-2^{n-1} & \cancel{1}+2^{n-1} \\ \text{on?} & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où $u_n = 2-2^{n-1} - 1 + 2^{n-1}$

$$\boxed{u_n = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

0

10

Exercice 3

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$A^2+A+I_n=0.$$

$P(X)=X^2+X+1$ est un polynôme annulateur de A qui n'admet pas de racines réelles. $\Delta=1-4=-3<0$.

donc le polynôme minimal π_A qui divise P n'admet pas de racines réelles.

Comme les racines de π_A sont les mêmes racines que χ_A alors le polynôme caractéristique χ_A n'admet pas de racine réelle. Ce qui montre que le degré de χ_A est pair (car tout polynôme de degré impair à coefficient réel admet au moins une racine réelle).