# Corrigé de l'examen d'Algèbre 3

## Solution 1

1. La matrice $A$ associée à l'endomorphisme $f$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

01 pt

2. Le noyau et l'image de $f$

$$\text{Ker} f = \{ X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \}$$

$f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow AX = 0_{\mathbb{R}^2}$

$\det A = 8 \neq 0 \Rightarrow A$ est inversible, par conséquent $f$ est bijective. Donc

$$\text{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \text{ et } \text{Im} f = \mathbb{R}^2$$

0,5 pt + 0,5 pt

3. Calculons tout d'abord le polynôme caractéristique de $A$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1$$

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda)(4-\lambda)$$

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 & \text{valeur propre simple} \\ \text{ou} & \\ \lambda = 4 & \text{" - " "} \end{cases}$

L'ensemble des valeurs propres de $A$ est donc $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{2, 4\}$

Etude du sous-espace propre associé à la valeur propre 2.

$E(2) = \ker(A - 2I_2)$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E(2) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 2x \\ x + 3y = 2y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ \Updownarrow \\ x + y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = -y$ [ou bien $y = -x$]

$E(2) = \langle (-1, 1) \rangle$ [ou bien $E(2) = \langle (1, -1) \rangle$]

→ 01 pt

Étude du sous-espace propre associé à la valeur propre 4

$E(4) = \ker(A - 4I_2)$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E(4) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 4x \\ x + 3y = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = y$

$E(4) = \langle (1, 1) \rangle$

→ 01 pt

4. La matrice B associée à l'endomorphisme f relativement à la base de vecteurs propres est :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

→ 0,5 pt

Calcul de $B^n$

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

→ 0,5 pt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(3-i\sqrt{3})}{2} x - y = 0 \\ \Updownarrow \\ \dfrac{(3-i\sqrt{3})}{2} x - y = 0 \end{cases}$$

$$E\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) = \left\langle \left(1, \frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle$$

$\longrightarrow$ 0,5 pt

De la même manière on trouve que :

$$E\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) = \left\langle \left(1, \frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle$$

$\longrightarrow$ 0,5 pt

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3-i\sqrt{3}}{2} & \frac{3+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ 0,5 pt

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ 01 pt

$$A^n = P D^n P^{-1}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3-i\sqrt{3}}{2} & \frac{3+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} -\left[\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right]^{n+1} - \left[\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right]^{n+1} & \frac{i}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right.\right. \\ -\left[\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right]\left[\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right]^{n+1} - \left[\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right]\left[\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right]^{n+1} & \frac{i}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right.\right. \\ & \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{cases} I_2 & \text{si } n = 3k, \quad k > 1 \\ A & \text{si } n = 3k+1 \\ A^2 & \text{si } n = 3k+2 \end{cases}$$