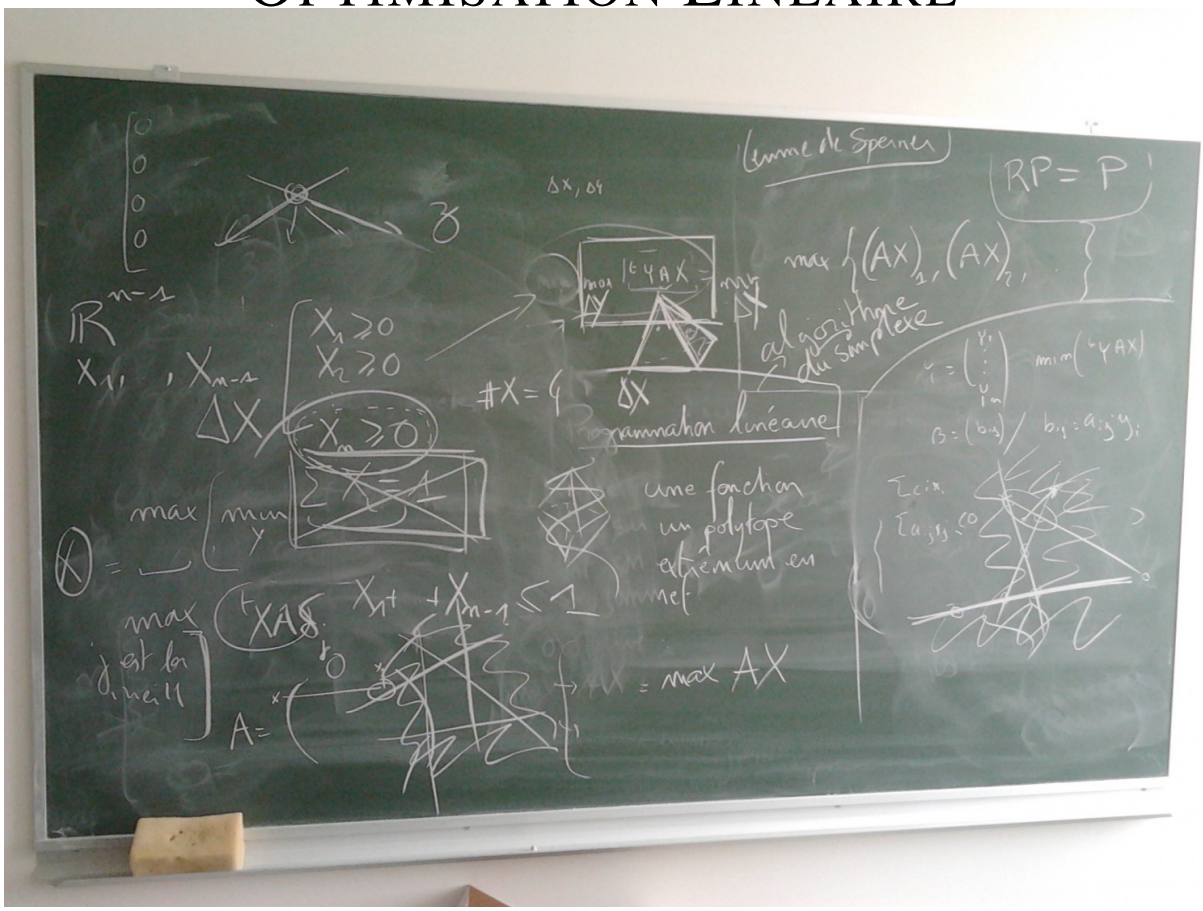
OPTIMISATION LINÉAIRE



Madani BEZOUI
madani.bezoui@gmail.com
http://mbezoui.webs.com

Année Universitaire 2014-2015

Ceci est un manuscrit établit pour permettre aux étudiants de deuxième année Recherche Opérationnelle, de l'Université de Boumerdes, une bonne assimilation et une bonne révision des cours de ce module. Veuillez me signaler d'éventuelles erreurs de frappe de saisie,... à l'adresse mail suivante :
madani.bezoui@gmail.com, Merci.
©. M. BEZOUI. UMBB. Mai 2015.

Table des matières

1 Introduction et Notions de bases 5

1.1 Notions de modèle mathématique 5

1.1.1 La modélisation Mathématique 5

1.1.2 Les modèles de la RO sont classes en deux grands groupes 5

1.2 Programme Linéaire 5

1.3 Formulation d'un programme linéaire 6

1.4 Forme d'un Programme Linéaire (PL) 7

1.4.1 Forme canonique d'un PL 7

1.4.2 Écriture matricielle d'un PL sous forme canonique 7

1.4.3 Règles de passage vers une écriture sous une forme canonique 8

1.5 Forme standard d'un programme linéaire 8

1.6 Convexité et ensemble convexe 9

2 Méthode du simplexe 11

2.1 Base et solution de base 11

2.2 Optimalité en un point extrême 13

2.3 Critère d'optimalité 13

2.3.1 Formule d'accroissement de la fonction objectif 13

2.4 Critère d'optimalité 14

2.5 Algorithme du simplexe 15

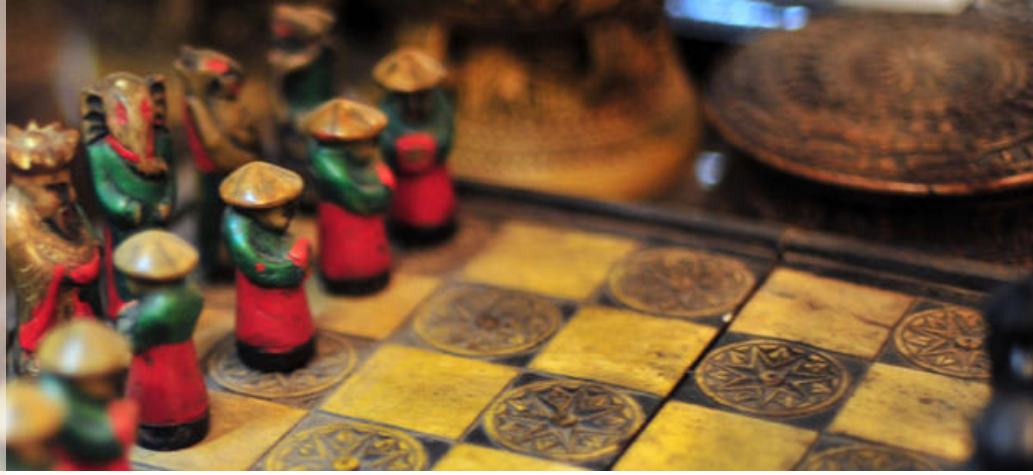
3 Dualité en Programmation Linéaire 19

4 Notion de dualité en Programmation Linéaire 21
4.1 Problème dual d'un problème de programmation linéaire 21
4.2 Méthode de construction du dual 22
4.3 Propriétés de la dualité 23
4.4 Correspondance entre Primal et Dual 25
4.5 Interprétation économiques des variables duales 25

5 Compléments sur l'algorithme du simplexe 27
5.1 Modeles non bornes, non realisables et degeneres 27
5.2 Absence de solution de base réalisable de départ 27

6 Algorithme dual du simplexe Relations entre Primal et Dual 29

Notions de modèle mathématique
La modélisation Mathématique
Les modèles de la RO sont classes en deux grands groupes
Programme Linéaire
Formulation d'un programme linéaire
Forme d'un Programme Linéaire (PL)
Forme canonique d'un PL
Écriture matricielle d'un PL sous forme canonique
Règles de passage vers une écriture sous une forme canonique
Forme standard d'un programme linéaire
Convexité et ensemble convexe



1. Introduction et Notions de bases

Un modèle est forcément une description limitée et orientée de la réalité. Il est impossible de décrire de manière absolue la réalité à des fins descriptives ou prédictives, sans même parler de l'intérêt d'une telle démarche (c'était l'utopie de Laplace et du déterminisme associé au paradigme mécaniste du XIXéme siècle).

1.1 Notions de modèle mathématique

1.1.1 La modélisation Mathématique

Un modèle mathématique est un outil et un moyen qui permet a simuler un problème, situation ou un phénomène réel pour mieux le comprendre et de le résoudre. En vue de l'optimisation, résoudre un modèle par une méthode consiste à chercher des solutions concrètes dites décisions optimales.

1.1.2 Les modèles de la RO sont classes en deux grands groupes

Modèles déterministes Système philosophique selon lequel les événements sont déterminés par des précédents, suivent une loi de causes à effets, donc ne fait pas appel au calcul de probabilité, on trouve ici deux grandes familles :

- **Optimisation linéaire** transport et d'affectation, programmation en nombres entiers(PLNE), graphes et réseaux.....
- **Optimisation non-linéaire** quadratique, fractionnaire, la programmation dynamique

Modèles stochastiques : Se dit de phénomènes qui, partiellement, relèvent du hasard et qui font l'objet d'une analyse statistique, on peut citer les problèmes suivants : probabilistes, processus aléatoires, les files d'attentes, modèles de prévision et la théorie des jeux...

1.2 Programme Linéaire

La programmation linéaire (PL) est un outil mathématique d'aide a la décision, elle consiste a optimiser (Minimiser ou maximiser) une fonction linéaire dite fonction économique ou fonction objectif exprimée en fonction d'un nombre de variables appelées variables de décisions sur un espace (ensemble) non vide obtenu à partir des contraintes du problème.

1.3 Formulation d'un programme linéaire

Etant donné un problème d'ordre économique, en vue de l'optimisation, pour modéliser ce problème sous forme d'un PL, il faut identifier soigneusement les trois éléments suivants :

Définition 1 (Variables de décisions)**.**
Ce sont les facteurs que l'on peut modifier dans le système, elles décrivent les inconnus du problème et représentent des quantités utiles sur lesquelles des décisions seront prisent.

Définition 2 (Contraintes)**.**
Ce sont les paramètres du système étudié et sur lesquels on ne peut apporter aucune modification. Elles regroupent toutes les restrictions et conditions imposées au problème posé sous forme d'inégalités ou d'égalités $(\leq; \geq; =)$.

Définition 3 (Fonction objectif)**.**
Constitue la fonction a optimiser ou bien l'objectif à atteindre.

Exemple 1 (Problème de Planification de Production)**.**
Une usine sis à Boumerdes, fabrique 2 produits P1 et P2 nécessitant des ressources d'équipement, de main d'oeuvre et de matières premières disponibles en quantité limitée.

P1 et P2 rapportent à la vente 6$ et 4$ euros par unité.
Quelles quantités (non entières) de produits P1 et P2 doit produire l'usine pour maximiser le bénéfice total venant de la vente des 2 produits ?

Solution 1.

Variables de décisions x_i : quantité de produit i fabriqué.

Fonction objectif à maximiser La fonction objectif f correspond au bénéfice total : $f(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2$. On cherche donc :

$$\max_{x_1,x_2}[f(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2]$$

Contraintes
— Disponibilité de chacune des ressources :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 &\leq 81 \\ 4x_1 + 5x2 &\leq 55 \\ 2x_1 + x2 &\leq 20 \end{aligned}$$

— Les quantités produites ne peuvent pas être négatives : $x_1, x_2 \leq 0$.

En résumé, le problème de production se modélise sous la forme d'un programme linéaire :

$$\begin{cases} \max f(x_1,x_2) & = 6x_1 + 4x_2 \\ s.c. & \\ 3x_1 + 9x_2 & \leq 81 \\ 4x_1 + 5x2 & \leq 55 \\ 2x_1 + x2 & \leq 20 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

1.4 Forme d'un Programme Linéaire (PL)

1.4.1 Forme canonique d'un PL

Tout problème de programmation linéaire peut se formuler sous forme suivante :

$$(P_1)\begin{cases} \max f(x_1,x_2,...,x_n) & = c_1x_2 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \sum_{j=n}^{n} c_jx_j. \text{ (fonction objectif)} \\ s.c. & \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{2n}x_n & \leq b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & \leq b_m \\ x_i \geq 0 & \text{i}=\overline{1,n} \end{cases}$$

c_i Coefficients de la fonction objectifs.
b_i Les seconds membres.
a_{ij} Coefficients des contraintes.

1.4.2 Écriture matricielle d'un PL sous forme canonique

Le problème (P_1) peut s'écrire comme suit : $(P_1)\begin{cases} \max f(x) & = c^T x. \\ s.c. & \\ A.x & \leq b \\ x \geq 0 & \end{cases}$ *Avec*

est un n-vecteur qui représente les coefficient de la fonction objectif.

est un n-vecteur qui représente les variables de décisions.

est une $m \times n$- matrice qui représente les contraintes du problème.

est un m- vecteur qui représente le second membre du problème.

Soient $I = \{1,2,...,n\}$: l'ensemble des indice ligne de A, et $J = \{1,2,..,m\}$: l'ensemble des indices colonnes de A. Dans ce qui suit, la notation suivante est nécessaire $a_k = A(I,k) = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{1k} \\ \vdots \\ a_{ik} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$.

1.4.3 Règles de passage vers une écriture sous une forme canonique

1. $\max f(x) = -\min(-f(x))$. Démonstration. Exercice.
2. si une variable est soumise à aucune condition de signe ($x_j \in \Re$), on la remplacera par deux variables $x', x" \in \Re^+$, telles que : $x_j = x' - x", x' \geq 0, x" \geq 0$.
3. Si on a une contrainte du type égalité, il suffit de la transformer en double inégalités : $ax = b \Longleftrightarrow ax \leq b \; et \; ax \geq b \Longleftrightarrow ax \leq b \; et \; -ax \leq -b$,

Exemple 2.

Écrire sous forme canonique, puis matricielle le problème suivant :

$$\begin{cases} \max f(x_1,x_2) & = 6x_1 + 4x_2 \\ s.c. & \\ 3x_1 + 9x_2 & \leq & 81 \\ 4x_1 + 5x2 & \leq & 55 \\ 2x_1 + x2 & \leq & 20 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

1.5 Forme standard d'un programme linéaire

L'écriture suivante :

$$(P_1) \begin{cases} \max f(x) & = c^T x. \\ s.c. & \\ A.x & = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

est dite l'écriture forme standard d'un programme linéaire.

Théorème 1.

On peut toujours écrire un problème canonique sous une forme standard et vis versa.

Soit :

$$(P_1)\begin{cases} \max f(x) & = c^T x. \\ s.c. & \\ A.x & \leq b \\ x \geq 0 & \end{cases} \iff \begin{cases} \max f(x) & = c^T x + 0_m.x_e \\ s.c. & \\ A.x + I_m x_e & = b \\ x \geq 0 & \mathrm{x}_e \geq 0. \end{cases}$$

Où : les variables x_e : est un m-vecteur qui représente les variables d'écart des m contraintes du problèmes.

— Démonstration de la réciproque, à faire comme exercice.

1.6 Convexité et ensemble convexe

Définition 4.

Un ensemble D non vide est dit convexe si et seulement si pour tout élément x et y de D et pour tout $\lambda \in [0,1]$: $\lambda x + (1-\lambda)y \in D$.

Graphiquement, pour vérifier qu'un ensemble est convexe on vérifie que pour toute paire de points P_1 et P_2, dans D, l'ensemble des points qui forment le segment $[P_1, P_2]$ appartient à D.

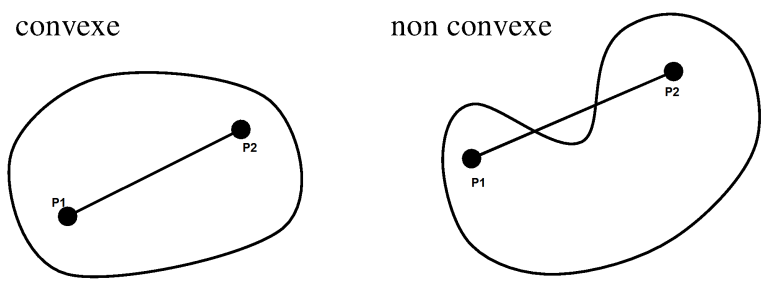


FIGURE 1.1 – Ensemble convexe [à gauche] e non convexe [à droite]

Théorème 2.

L'intersection d'ensembles convexes (non vide) est convexe.

Théorème 3.

L'ensemble des solutions réalisables (non vide) est convexe.

Théorème 4.

Soit $A \subset \Re, (A \neq \varnothing)$, on appelle envelope convexe de A, le plus petit ensemble convexe contenant A, noté $\xi(A), (A \subset \xi(A))$.

Définition 5.

L'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés de $\Re^n$ est appelé polytope fermé.

Définition 6.

On appelle polyèdre, un polytope convexe borné (c'est à dire compact convexe de $\Re^n$).

Démontrez que le polyèdre $D = \{x \in \Re^n, Ax = b, x \geq 0\}$ est un ensemble convexe.

Définition 7 (Point extrême)**.**

Soit D un ensemble convexe de $\Re^n$ et x_0 un élément de D. x_0 est appelé *point extrême* de D s'il existe pas deux point x_1 et $x_2 \in D$ tels que :

$$x_0 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \forall]0,1[$$

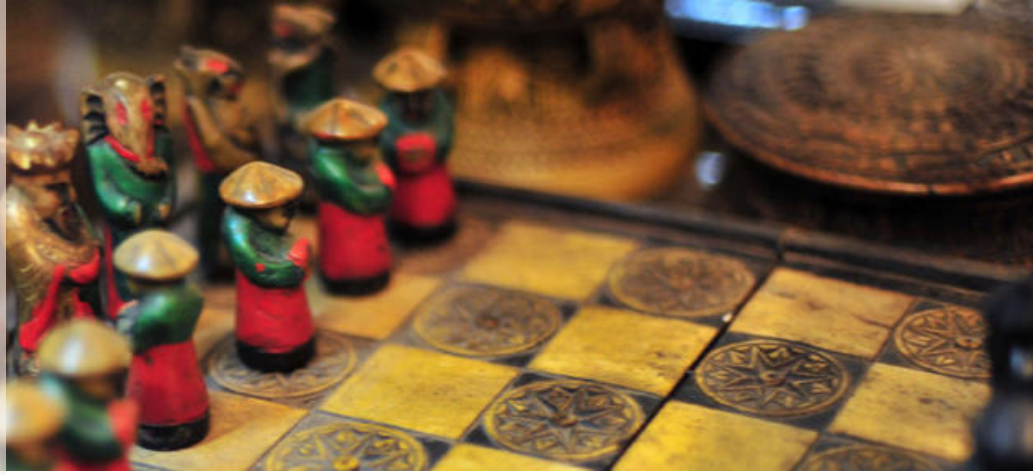
Théorème 5.

Soit $x \in \Re^n$, un point extrême, alors les vecteurs de A correspondants aux valeurs strictement positives de x sont linéairement indépendantes.

Théorème 6.

Si une fonction atteint son maximum (minimum) en un point quelconque de D, alors ce point est extrême. Si le maximum (minimum) est atteint en deux point extrême x^1, x^2 alors tous les points du segment sont optimales.

Base et solution de base
Optimalité en un point extrême
Critère d'optimalité
Formule d'accroissement de la fonction objectif
Critère d'optimalité
Algorithme du simplexe



2. Méthode du simplexe

2.1 Base et solution de base

Soit le PL suivant : $(P)\begin{cases} \max f(x) & = c^T x. \\ s.c. & \\ A.x = \text{b} & \dots (1) \\ x \geq 0 & \dots (2) \end{cases}$

Définition 8.
$D = \{x \in \Re^n, Ax = b, x \geq 0\}$ est dit ensemble des solutions réalisables.

Définition 9.
Tout vecteur vérifiant les contraintes (1) et (2) est appelé "solution réalisable" (admissible) du problème (P).

Définition 10.
Une solution réalisable x^* est dite optimale si : $c^T x^* = \{\max c^T x, \forall x \in D\}$.

Définition 11.

Une solution réalisable x est dite de base si $(m-n)$ de ses composante sont nulles et les autres $x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_m}$, correspondent au m vecteurs $a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_m}$, de la matrice qui sont linéairement indépendants.

1. $J_B = \{j_1, ..., j_m\}$ est appelé ensemble des indices de base.
2. $J_N = J \setminus J_B$: ensemble des variables hors base.

Autrement dit, une solution $x = x(J)$ est dite solution de base si : $x_N = x(J)$ est dite solution de base si $x_N = x(J_N) = 0$ et $det(A_B) \neq 0$, où $A_B = A(I, J_B)$.

1. La matrice A_B est appelée "matrice de base".
2. $x_B = x(J_B)$: composantes de base.
3. $x_N = x(J_N)$: composantes hors base.

Définition 12.

Une solution de base x est dite dégénéré si $x_j > 0, j \in J_B$.

Exemple 3.

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = 7 \\ 2x_1 - 7x_3 + x_4 & = 9 \end{cases}$ A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ La solution basique liée à la base $A_B = A(I, J_B) = (a_3, a_4) = b$ admet une unique solution de base qui est $x = (0, 0, \frac{-1}{2}, \frac{11}{2})$, tel que $Ab = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{7}{4} & \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$

Théorème 7.

L'ensemble des points extrêmes du polygone convexe $X = \{x \in \Re^n / Ax = b, x \geq 0\}$, est égale à l'ensemble des solutions de bases réalisables.

On doit montrer que toute solution de base réalisable est un point extrême et que tout point extrême est une solution de base réalisable.

Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix}$

Une solution de base réalisable associée à la base A_B.

Supposons que x n'est pas un point extrême donc il existe deux solutions réalisables y et z tel que

$$x = \alpha y + (1-\alpha)z, \alpha \in]0,1[, \ pour\ x \neq y \neq z \tag{2.1}$$

La relation 2.1 peut être exprimée comme : $\begin{cases} x_B = \alpha y_B + (1-\alpha) z_B \\ x_N = \alpha y_N + (1-\alpha) z_N \quad avec\ x_N = 0 \end{cases}$

Mais, $y_N \geq 0, z_N \geq 0$, par conséquent, $\alpha y_N + (1-\alpha) z_N = 0 \Rightarrow (y_N = 0\ et\ z_N = 0)$.

D'autre part, on a : $Ay = b\ et\ Az = b$ puisque y et z sont réalisables, alors :

$$\begin{cases} A_B.y_B = b & \text{Avec } y_N = 0 \\ A_B.z_B = b & \text{Avec } z_N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_B = A_B^{-1} b & \text{Avec } y_N = 0 \\ z_B = A_B^{-1} b & \text{Avec } z_N = 0 \end{cases}$$

On a alors,

$$y = \begin{pmatrix} y_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_B \\ 0 \end{pmatrix} = z$$

D'où, la contradiction avec le fait que $y \neq z$. Alors x est un point extrême.

2.2 Optimalité en un point extrême

Théorème 8.

La fonction objectif du problème (3.1), atteint son maximum en un point extrême de l'ensemble X des solutions réalisables.
Si la fonction objectif atteint son maximum en plusieurs points, elle prendra cette même valeur maximales en tout points qui est combinaison linéaire convexe de ces points extrêmes.

2.3 Critère d'optimalité

2.3.1 Formule d'accroissement de la fonction objectif

Soit x une solution de base réalisable et $A_B = A(I, J_B)$ la matrice de base associée. Soit $\bar{x}$ une autre solution réalisable telle que $\bar{x} = x + \Delta x$,

$$\begin{aligned} \Delta Z &= Z(\bar{x}) - Z(x) \\ &= c^T \bar{x} - c^T x \\ &= c^T (\bar{x} - x) \\ &= c^T \Delta x. \end{aligned}$$

On a x et $\bar{x}$ des solutions réalisables : $\begin{cases} A.\bar{x} = b & .... (1) \\ A.x = b & ..... (2) \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
(1)-(2) \Rightarrow \quad & \Rightarrow \quad A.\bar{x} - A.x = 0 \\
& \Rightarrow \quad A.(\bar{x} - x) = 0 \\
& \Rightarrow \quad A.\Delta x = 0 \\
& \Rightarrow \quad A_B.\Delta x_B + A_N.\Delta x_N = 0 \\
& \Rightarrow \quad A_B.\Delta x_B = -A_N.\Delta x_N \\
& \Rightarrow \quad \Delta x_B = -A_B^{-1}.A_N.\Delta x_N \\
& \Rightarrow \quad \Delta Z = c_B^T.\Delta x_B + c_N^T \Delta x_N \\
& \Rightarrow \quad \Delta Z = c_B^T(-A_B^{-1}.A_N.\Delta x_N) + c_N^T \Delta x_N \\
& \Rightarrow \quad \Delta Z = (-c_B^T.A_B^{-1}.A_N.\Delta x_N) + c_N^T \Delta x_N \\
& \Rightarrow \quad \Delta Z = (-c_B^T.A_B^{-1}.A_N + c_N^T)\Delta x_N
\end{aligned}
$$

On définit :

- ☞ le vecteur $n-vecteur$ des potentiels $u^T = c_B^T.A_B^{-1}$,
- ☞ le vecteur $n-vecteur$ des estimations $E^T = c^T - u^T.A$,

La j^{eme} composante du vecteur des estimations est donnée par : $E_j = c_j - u^T.a_j,\ j \in J$.

D'où : $\begin{cases} E_B^T = & c_B^T - u^T.A_B = c_B^T - c_B^T.A_B^{-1}.A_B = 0 \\ E_N^T = & c_N^T - u^T.A_N \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \Delta Z &= (-u^T.A_N + c_N^T).\Delta x_N \\
\Rightarrow \Delta Z &= -(u^T.A_N - c_N^T).\Delta x_N \\
\Rightarrow \Delta Z &= \sum_{j \in J_n} E_j.\Delta x_j
\end{aligned}
$$

2.4 Critère d'optimalité

Soit x une solution réalisable de base associée à la base $A_B = A(I, J_B)$. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que x soit une solution optimale du problème (3.1) ?

Théorème 9.

- ☞ L'inégalité $E_N \leq 0$ est suffisante pour l'optimalité de la solution de base réalisable x. i.e.

$$\begin{cases} \text{x est une solution de base réalisable} \\ E_N \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \text{ est une solution du problème (3.1).}$$

- ☞ L'inégalité $E_N \leq 0$ est nécessaire pour l'optimalité de la solution de base réalisable x si celle ci est non dégénérée.

i.e. Si x est une solution optimale non dégénérée, alors $E_N \leq 0$.

Soit $x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix}$, une solution de base réalisable du problème (3.1) et soit $\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{x}_B \\ \overline{x}_N \end{pmatrix}$, une solution réalisable quelconque. On a :

$$\Delta x_N = \overline{x}_N - x_n = \overline{x}_N,$$

On a aussi :

$$\Delta Z = \sum_{i \in J_N} E_j.\Delta x_j = E_N^T \Delta x_N$$

Si

$$\begin{aligned} E_N^T \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad \Delta Z \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad Z(\overline{x}) - Z(x) \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad Z(x) \geq Z(\overline{x}),\ \forall \overline{x} \in X. \end{aligned}$$

Donc x est une solution optimale pour le problème (3.1).

Théorème 10.

La fonction objectif du problème (3.1) n'atteint pas son maximum, si parmi les composantes non basique des estimations, il existe une qui est strictement négative et pour laquelle correspond le vecteur $A_B^{-1} a_{j_0} \leq 0$.

2.5 Algorithme du simplexe

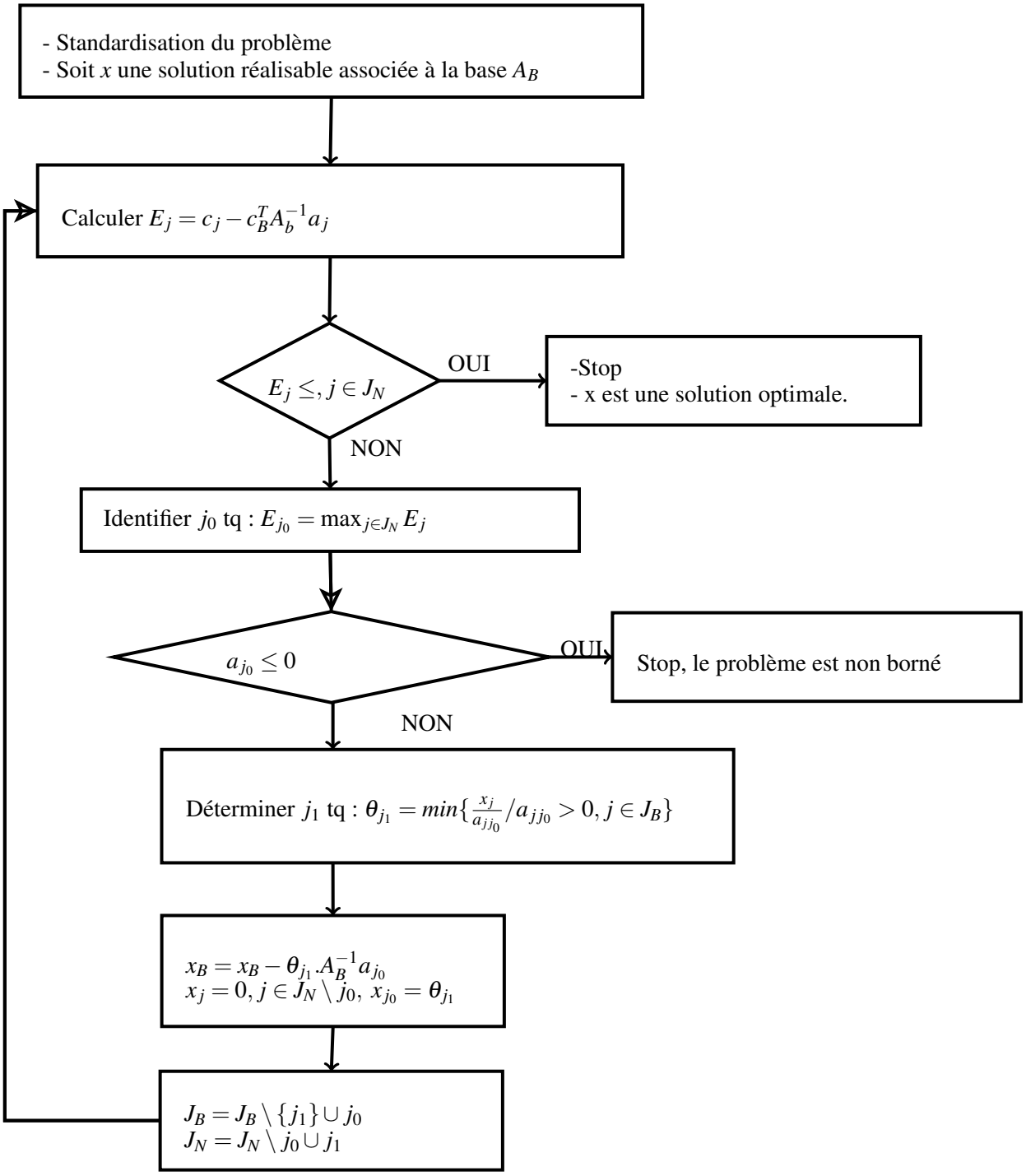


FIGURE 2.1 – Organigramme de l'algorithme du simplexe

Exemple 4.

Soit l'exemple de problème de programmation linéaire suivant :

$$(P_1):\begin{cases} \max 2x_1+x_2 \\ x_1+x_2\leq 5 \\ -2x_1+3x_2\leq 6 \\ 2x_1-3x_2\leq 6 \\ x_1,x_2\geq 0 \qquad i=1,2 \end{cases}$$

☞ On commence par rendre le problème (P_1) sous forme standard, on ajoutant des variables d'écarts x_3,x_4,x_5 :

$$(P_1):\begin{cases} \max 2x_1+x_2 \\ x_1+x_2+x_3 = 5 \\ -2x_1+3x_2+ +x_4 = 6 \\ 2x_1-3x_2 +x_5 = 6 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0 \qquad i=1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ est une solution réalisable de base,

avec $A_b=(a_3,a_4,a_5)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, J_B=\{3,4,5\}, J_N=\{1,2\}, x_B=\{5,6,6\}, x_N=\{0,0\}$ et $Z=$

$c_B^Tx_B+c_N^Tx_N=c_B^Tx_B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}=0$

Le premier tableau sera construit comme suit :

x			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
c			2	1	0	0	0		
c_B	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ	
0	a_3	5	1	1	1	0	0	5	
0	a_4	6	-2	3	0	1	0		
0	a_5	6	2	-3	0	0	1	**3**	$j_1=5\rightsquigarrow$
$Z=0$		E	**2**	1	0	0	0		
			$j_0=1\uparrow$						

☞ Les composantes du vecteur des estimations sont données par : $E_j=c_j-c_B^Ta_j, j=1,..,5$.

☞ L'indice j_0 tel que $E_{j_0}=min\{E_j, j\in J_N\}=E_1$ et $j_0=1$.

☞ Le paramètre θ_{j_1} tel que :

$$\theta_{j_1}=\max\{\theta_j=\frac{x_j}{a_{jj_0}}, j\in J_B\}=\frac{x_{j_1}}{a_{j_1j_0}}=\frac{x_5}{a_{51}}=\frac{6}{2}=3\Longrightarrow j_1=5$$

☞ La nouvelle base est alors : $\{a_3, a_4, a_1\}$ et le nouveau tableau du simplexe est :

x			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
c			2	1	0	0	0		
c_B	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ	
0	a_3	2	0	$\frac{5}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$j_1 = 3 \rightsquigarrow$
0	a_4	12	0	0	0	1	1	∞	
2	a_1	3	1	$-\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	∞	
$Z = 6$		E	0	4	0	0	-1		
				$j_0 = 2 \uparrow$					

Dans cette deuxième itération on trouve : $Z = 6, j_0 = 2, j_1 = 3$

☞ La nouvelle base sera alors : $\{a_2, a_4, a_1\}$ et le nouveau tableau du simplexe est :

x			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
c			2	1	0	0	0
c_B	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	a_2	$\frac{4}{5}$	0	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
0	a_4	12	0	0	0	1	1
2	a_1	$\frac{21}{5}$	1	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
$Z = \frac{46}{5}$		E	0	0	$-\frac{8}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$

☞ Comme toutes les composantes du vecteur des estimations sont non négatives, $(E_j \leq 0, j \in J_N)$, alors, la solution courante $x^* = \begin{pmatrix} \frac{21}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une solution optimale du problème (P_1), et la valeur de la fonction objectif est : $Z^* = \frac{46}{5}$.

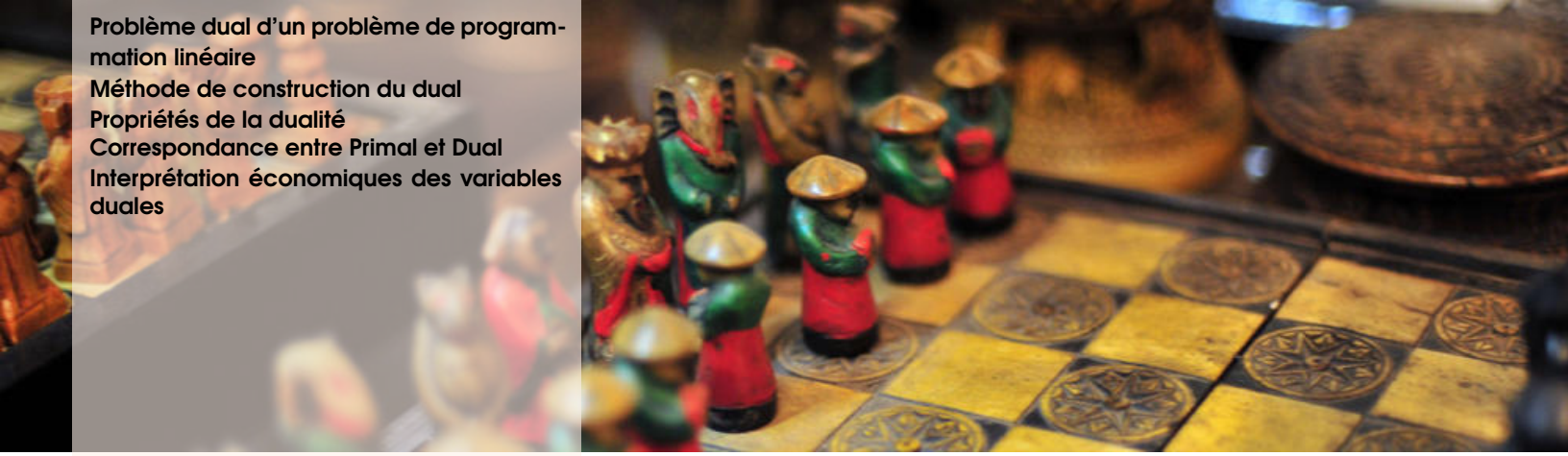
Exemple 5.

Soit le problème suivant :

$$(P_1) : \begin{cases} \max 2x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \qquad i = 1, 2 \end{cases}$$

☛ Résoudre ce problème graphiquement puis avec la méthode du simplexe. (à rendre la semaine prochaine).

3. Dualité en Programmation Linéaire



Problème dual d'un problème de programmation linéaire
Méthode de construction du dual
Propriétés de la dualité
Correspondance entre Primal et Dual
Interprétation économiques des variables duales

4. Notion de dualité en Programmation Linéair

La notion de dualité est un aspect très important de la programmation linéaire. Elle a fut développé par John Newmann en 1947 où il a démontré qu'à tout modèle linéaire qu'on appelle programme primal (P) correspond un autre appelé programme dual (D) et leurs fonctions objectifs sont égales. Depuis, cette notion a suscité une intention très particulière dans plusieurs domaines tels que optimisation non convexe, programmation non linéaire, théorie des jeux ... Dans un contexte d'entreprise, la résolution du primal (P) permet d'obtenir une utilisation optimale des ressources, quand au dual permet d'attribution de valeurs monétaires à ces ressources. Toutefois, l'on doit noter que la signification économique du dual n'est figée, elle diffère selon l'angle du vu et selon la nature du problème abordé. D'un point de vue théorique, la notion de dualité permet : En résolvant le dual permet d'obtenir également la solution optimale du primal d'améliorer éventuellement le processus de résolution en résolvant l'un ou l'autre programme Elaborer d'autres techniques et algorithmes de résolution comme l'algorithme dual du simplexe qui est fondamentale dans l'étude de la programmation linéaire en nombres entiers (Chapitre 3) et analyse de sensibilité (Chapitre 5).

4.1 Problème dual d'un problème de programmation linéaire

Considérons le problème de PL suivant :

$$(P) : \begin{cases} Z(max) = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Soit $\{x^0, A_B\}$, une solution optimale de base non dégénérée du problème (P). A cette solution correspond le vecteur des potentiels suivant :

$$u^T = c_B^T . A_B^{-1} \tag{4.1}$$

De l'optimalité de x^0, le vecteur des estimations vérifie les inégalités suivantes :

$$E_N = A_N . u - c_N \geq 0 \tag{4.2}$$

En regroupant les relations (4.1) et (4.2), on constate que le vecteur u vérifie l'inégalité suivante :

$$A.u \geq c. \tag{4.3}$$

De plus la valeur de la fonction objectif du problème (P) s'écrit comme suit :

$$c^T x^0 = c_B^T.x_B^0 + c_N^T + x_N^0 = c_B^T.x_B^0 = c_B^T.A_B^{-1}.b = u^T.b = b^T.u \tag{4.4}$$

Soit y un m-vecteur arbitraire vérifiant $A^T y \geq c$ ou $y^T A \geq c^T$

Comme $x^0 \geq 0$, donc en multipliant la dernière inégalité par x^0, on aura : $y^T A x^0 \geq c^T x^0$ et comme $Ax^0 = b$, donc on obtient :

$$b^T.y \geq b^T.u, \forall y \in \tag{4.5}$$

De (4.4) et (4.5), on en déduit que le vecteur u est une solution optimale du problème de programmation linéaire suivant :

$$(D) : \begin{cases} W(min) = b^T y \\ Ay \geq c \\ y \in \Re^m \end{cases}$$

Le problème (D) est appelé problème **Dual** du problème (P) qui est appelé problème **Primal**.

Remarque 1.

Le Dual du Dual est le Primal.

4.2 Méthode de construction du dual

Les différentes transformations sont résumées dans le tableau suivant :

Primal	$\leftrightarrows$	Dual
$Z(Max) = c^T x$	$\leftrightarrows$	$W(Min) = b^T y$
i^{eme} Contrainte $\leq$	$\leftrightarrows$	Variable $y_i \geq$
i^{eme} Contrainte $\geq$	$\leftrightarrows$	Variable $y_i \leq$
i^{eme} Contrainte $=$	$\leftrightarrows$	$y_i \in \Re$
$x_j \geq 0$	$\leftrightarrows$	j^{eme} contrainte $\geq$
$x_j \leq 0$	$\leftrightarrows$	j^{eme} contrainte $\leq$
$x_j \in \Re$	$\leftrightarrows$	j^{eme} contrainte $=$

Exemple 6.

Soit le problème de programmation linéaire suivant :

$$(P_1) : \begin{cases} Z(max) = 2x_1 + x_2 & \\ x_1 - 2x_2 & \leq 2 \\ 5x_1 + x_2 & \geq 9 \\ -3x_1 + 6x_2 & = 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 & i = 1,2 \end{cases}$$

✍ Écrire le dual de (P_1).

Solution 2.

$$(P_2) : \begin{cases} W(min) = 2y_1 + 9y_2 + 7y_3 & \\ y_1 + 5y_2 - 3y_3 & \geq 2 \\ -2y_1 + y_1 + 6y_3 & \geq 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \in \Re & \end{cases}$$

4.3 Propriétés de la dualité

Étant donné un problème (P) et son dual (D).

Théorème 11 (Théorème Faible de la dualité)**.**

Si x^0 et y^0 sont deux solutions réalisables du primal (P) et du dual (D) respectivement, alors $c^T x \leq b^T y$.

On a x est une solution réalisable de (P) alors $Ax = b$ et en multipliant cette dernière équation par y^T, on obtient : $y^T.Ax = y^T.b$.

D'autre part ; y est admissible pour le dual (D), alors $Ay \geq c$, le signe de cette dernière inégalité ne va pas changer en multipliant par x^T, car $x \geq 0$, on obtient donc : $x^T Ay \geq x^T c$

Donc, $c^T x \leq y^T Ax = y^T b$, d'où $c^T x \leq b^T y$.

■

Théorème 12 (Théorème Fort de la dualité)**.**

Soient x^0 et y^0 deux solutions réalisables du primal et du dual respectivement.
Si $c^T x^0 = b^T y^0$ alors x^0 et y^0 sont des solutions optimales respectivement du primal et du dual.

Soit x une solution réalisable quelconque du problème primal (P). D'après le théorème faible de la dualité, on a $c^T x \leq b^T.y, \forall x, \forall y$, et pour $y = y^0$ on aura $c^T x \leq b^T y^0 = c^T x^0, \forall x \Longrightarrow x^0$ est optimale.

On a aussi, $c^T x \leq b^T y, \forall y, \forall x$ et en particulier $x = x^0$:

$$c^T x^0 \leq b^T y, \forall y \tag{4.6}$$

D'autre part, on a

$$c^T x^0 = b^T y^0 \tag{4.7}$$

De (4.6) et (4.7), on a $b^T y^0 \leq b^t y, \forall y$, donc y^0 est solution optimale de (D).

■

Théorème 13 (Ecart complémentaires)**.**

Soient x^0, y^0, deux solutions réalisables du primal et du dual respectivement.

x^0 et y^0 sont optimales si et seulement si : (I). $\begin{cases} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 - c_j) x_j^0 = 0 & \text{j=1,..,n} \\ (-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 - b_i) y_i^0 = 0 & \text{i=1,..,m} \end{cases}$

Condition nécessaire Soient x^0 et y^0 deux solutions optimales du primal et du dual respectivement. Des relations de la dualité, on a :

$c^T.x^0 = b^T y^0 = y^0 b = y^0 A x^0$

$\Longrightarrow y^0 A x^0 - c^0 x^0 = 0$

$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} y_i^0 a_{ij} - c_j) x^0 = 0$

On a obtenue une somme de terme positifs

$(x_j^0 \geq 0; \sum_{i=1}^{m} y_i^0 a_{ij} - c_j \geq 0)$ qui est égale à zéro, donc chaque terme est nul :

$(\sum_{i=1}^{m} y_i^0 a_{ij} - c_j) x^0 = 0, \forall j = \overline{1,n}$

On a aussi $y^{0^T}.Ax^0$

$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{m} y_i^0 b_i - \sum_{i=1}^{m} y_i^0 \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 = 0$

$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{m} y_i^0 (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0) = 0$

Comme $Ax^0 = b$, alors $y_i^0 (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 - b_i) = 0, \forall i = \overline{1,m}$.

Condition Suffisante Supposons que les égalités (I) sont vérifiées :

$(\sum_{i=1}^{m} y_j^m a_{ij} - c_j).x_j^0 = 0, j = \overline{1,n}$

$(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j^0 - b_i).y_i^0 = 0, i = \overline{1,m}$

En sommant la première équation par rapport à j et la deuxième par rapport à i, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^0x_j^0 - \sum_{j=1}^{n} c_j.x_j^0 = 0....(*)$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_iy_i^0 - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_i^0a_{ij}x_j^0 - \sum_{j=1}^{n} c_j.x_j^0 = 0...(**)$$

En sommant les deux équations (*) et (**) on obtient $c^Tx^0 = b^Ty^0$, et en vertu du théorème fort de la dualité, on déduit que x^0 et y^0 sont optimales.

4.4 Correspondance entre Primal et Dual

		Dual		
		(1) *Solution optimale*	(2) *Optimum infini*	(3) *pas de solution*
Primal	(1) *Solution optimale*	(a)	impossible	impossible
	(2) *Optimum infini*	impossible	impossible	(b)
	(3) *pas de solution*	impossible	(b)	(c)

FIGURE 4.1 – Résumé des cas entre Dual et Primal

4.5 Interprétation économiques des variables duales

Notons que la signification des variables duales n'est pas toujours figée ; elle diffère selon la nature et le contexte du problème à résoudre. Sur le plan économique, le programme primal consiste à l'utilisation optimale des ressources quand au programme dual modélise la situation d'un concurrent qui veut acquérir ces ressources. Pour mieux comprendre la notion de dualité, partons d'un problème réel, une entreprise fabrique deux modèles de téléviseurs TV Slim et TV Ultra. L'assemblage se fait en utilisant 3 types de ressources :Assembleur A, et Assembleur B et vérification . Le modèle linéaire qui maximise son profit est le PL suivant :

$$(P_2) : \begin{cases} Z(max) = 66x_1 + 84x_2 & \text{Profit total} \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 4200 & \text{Assmbleur A} \\ x_1 + 3x_2 \leq 2250 & \text{Assembleur B} \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 2600 & \text{Vérification} \\ x_1, x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

Avec x_1 et nombre de TV Slim et x_1 celui TV Slim, et les contraintes représentent les capacités des ressources. La première contrainte représente les limite quotidienne sur le fonctionnement de l'assembleur A (en heure) où un TV

Slim exige 3h, et un TV Slim exige 4h pour être assembler. De même, la deuxième contrainte décrit les limites sur l'utilisation de l'assembleur B, quand la troisième contrainte montre les limites horaires sur la vérification et empaquetage en heures.

La solution optimal de ce modèle est $x_1^* = 1000, x_2^* = 300, e_1^* = 0, e_2^* = 350, e_3^* = 0$ et $z^* = 91200$. La formulation du dual nous conduit à inciter l'entreprise à ajouter des heures supplémentaires sur ces ressources. Mais Combien l'entreprise devrait-elle payer ces heures ? Combien pourrait-elle gagner ? Conformément aux résultats trouvés précédemment, si on augmente la capacité de l'assembleur A d'une seul heure, l'entreprise aura $y_1 = 18u.m$ de gain supplémentaire le montant du bénéfice sera majoré de 18, il passe de 91 200 à 91 200+18=91 218 u.m, l'entreprise n'a pas intérêt d'augmenter la capacité de l'assembleur B car cette dernière reste oisive pendant 350 heures, si on augmente la capacité de vérification d'une seul heure, le montant du bénéfice sera majoré $y_3 = 6u.m$, il passe de 91200 à 91200+6=91206 u.m.

En autre, le programme dual peut décrire la situation d'un concurrent qui veut racheter cette entreprise. Le gérant de cette entreprise décide de ne pas utiliser les 3 ressources, il envisage de les vendre, mais il ne connaît pas leurs valeurs monétaires ?

Cependant, le gérant de cette entreprise exigera évidement un montant qui sera supérieure au profit généré par ces ressources. Ainsi, le concurrent doit imputer des valeurs monétaires pour chaque unité des ressources considérées en formulant le dual (D). Ainsi, y1 est le prix de soumission d'une heure de travail de l'assembleur A, et y_2 est le prix de soumission d'une heure de travail de l'assembleur B et y_3 est le prix de soumission d'une heure de vérification. Cet acheteur doit proposer un prix au moins égal à $w = 4200y_1 + 2250y_2 + 2600y_3$ pour acquérir les 3 ressources et doit être minimisé. Très important : Dans certaines situations réelles où on peut les décrire à travers d'un programme linéaire en vue d'optimisation, son dual pourra de ne pas avoir aucune interprétation.

5. Compléments sur l'algorithme du simplexe

5.1 Modèles non bornés, non réalisables et dégénérés

On dit qu'un PL est non borné lorsque le polyèdre de solutions réalisables est non borné. Dans l'algorithme du simplexe, cette situation est constatée si à une itération donnée lorsqu'une variable xr est sélectionnée pour rejoindre la base mais tous les éléments air sont tous nuls ou négatifs. 2. Un PL est dit irréalisable lorsque le polyèdre de solutions réalisables est vide, cela veut dire qu'il y a une contradiction entre certaines contraintes. Ce cas peut $^{e}treenvisagdanslesmthodesdedeuxphasesetpnalits(BigM), plusprcismentquandlecritred'optimalitestsatisfaitetuneouplusieu$

On dit qu'un PL est dégénéré si à une itération du simplexe plusieurs variables de base ont le m$^{e}memin fXBiair; air >$ $0g, c.--d.lechoixdelavariablesortantedelabaseetmultiple.Danscettesituation, l'algorithmedusimplexerisquedenepasconver$ $Latechniquedesperturbations: cettetechniquepermetd'viterlecyclagelorsdeladgnrescence.enprsencedeladgnrescenceuneitrat$ $Xk+1Bi=XkBi+Xi2JBaijj; > 0nombrerelassezpetitPuiscontinuerlarsolutionenfonctionde jusqu'atteindrelecritred'arr^{e}tdu$ $0.Pourillustreretcomprendrelacasdeladgnrescence(veuillezvoirl'exercice3sriedeTDN3)$

5.2 Absence de solution de base réalisable de départ

Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre précédent, l'algorithme du simplexe débute avec une solution de base réalisable initiale. En effet, il a été facile de trouver cette solution pour les PLs avec contraintes de type Ax = b et b = 0 en ajoutant des variables d'écarts ei qui serviraient comme variables de base pour le premier tableau du simplexe. En autres, un PL peut comporter des contraintes mixtes (; ; =), bien sur la forme standard est facile à obtenir mais le problème réside sur l'obtention d'une solution de base réalisable du départ. Dans ce cas, il faut avoir recours à l'ajout des autres variables dites Variables artificielles xai uniquement pour les contraintes nécessaires, après on va identifier une solution de base réalisable de départ qui sera évidement en présence de toutes les variables artificielles. Etant donné un PL (P) dit original contenant contraintes mixtes (; ; =), il existe deux techniques pour résoudre ce genre de programmes linéaires, il s'agit de la méthode de deux phases et la méthode des pénalités (Big M) que nous allons développer dans ce chapitre.

Méthode de deux phases Etant donné un PL (P) dit original contenant contraintes mixtes (; ; =) Après avoir introduire les variables artificielles aux contraintes nécessaires, cette technique permet de résoudre le PL (P) en deux phases. 1. Phase 1 : cette phase consiste à déterminer une solution de base réalisable pour le PL original en résolvant le PL

secondaire : min ' = Xr i=1 xai tels que r : est le nombre de variables artificielles ajoutées, bien évident, ce PL sera résolus sous la forme standard de (P). Lors de sa résolution on peut envisager les 3 cas : 1ère Cas : Si le critère d'optimalité est satisfait et ' > 0, alors il y a toujours des variables artificielles dans la base, la phase 1 se termine et le PL (P) original n'admet pas de solutions réalisables. 2éme Cas : Si ' = 0 (il n'est pas nécessaire de satisfaire le critère d'optimalité) et toutes les variables artificielles sont hors base, le dernier tableau optimal sera considéré comme premier tableau de la phase 2. 3ème Cas Si ' = 0 avec le critère d'optimalité est satisfait et il reste une ou plusieurs variables artificielles dans la base avec des valeurs nulles, alors il faut les exprimé en fonction des variables hors base avant de commencer la phase 2. | Lors de la phase 1, à chaque itération où une variable artificielle est sélectionnée pour quitter la base il faut supprimer sa colonne dans la prochaine itération. 2. Phase 2 : le but de cette phase est de déterminer une solution optimale du PL (P) en débutant par la solution de base réalisable fournit par la 1ére phase tout en optimisant la fonction objectif du (P).

6. Algorithme dual du simplexe Relations entre