Université de M'hamad Bougara de Boumerdès
Faculté des Sciences
Deuxième Année Licence
Recherche Opérationnelle
Département de Mathématiques
Responsable du Module:
Mr. M. BEZOUI

Série de TD N°01 d'Optimisation Linéaire

0.1 Exercices

Exercice 1 (Voir la solution 1)**.** Un artisan menuisier fabrique des tables et des chaises à base du bois et d'un métal pour le compte d'un revendeur, il emploie deux jeunes stagiaires. Son stock pour la semaine à venir en bois est 60 m^2 et 30 mettre du métal. La fabrication d'une table nécessite 3h du travail et 5 m^2 du bois et 2m du métal, et pour fabriquer une chaise il faut 1.5 h du travail et 2 m^2 du bois et 1m du métal. Le menuiser et ses stagiaires travaillent 40 h par semaine, une chaise génère le profit de 2000 DA et une chaise dégage un profit de 1200 DA. Toute sa production sera vendue le lendemain.

- Modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire afin de maximiser le bénéfice hebdomadaire?

Exercice 2 (Voir La solution 2)**.** Une entreprise produit deux types de ceintures A et B. Le type A est de meilleure qualité que B. le bénéfice est de 200 Da pour le type A et de 150 Da pour le second type. Le temps de fabrication pour le type A est le double du temps pour la fabrication du type B et si toutes les ceintures étaient du type B l'entreprise pourrait en fabriquer 1000 par jour. L'approvisionnement en cuir est suffisant pour 1400 ceintures par jour (Type A et B), 800 boucles de type A et 900 pour le type B sont disponibles par jour.

- Modéliser ce Problème afin de maximiser le bénéfice total.

Exercice 3 (Voir La solution 3)**.** On doit organiser un pont aérien pour transporter 1600 personnes et 90 tonnes de bagages. Les avions disponibles sont de deux types: 12 du type A et 9 du type B. Le type A peut transporter, à pleine charge, 200 personnes et 6 tonnes de bagages. Le type B, 100 personnes et 6 tonnes de bagages. La location d'un avion du type A coûte 800.000 F; la location d'un avion du type B coûte 200.000 F.

✈ Trouver une formulation au problème sus-définit, pour trouver le nombre optimal d'avions de type A et du type B pour minimiser le coût de location.

Exercice 4 (Voir la solution 4)**.** Un chocolatier−confiseur confectionne des assortiments de chocolats. Dans ceux-ci il a convenu d'y placer 3 sortes de chocolats dénotés chocolat 1, 2 et 3, dont chaque kg lui coûte respectivement $400DA$, $140,5DA$ et $240DA$. Chaque assortiment doit peser un kg et se vendra $800DA$.

Le chocolat 1 doit représenter entre 10% et 20% du poids d'un assortiment. Le chocolat 1 et 2 présent dans l'assortiment ne doivent pas peser plus de $800g$. Au moins la moitié du poids d'un assortiment doit parvenir des chocolats 1 et 3.

☞ Quelle proportion de chaque type de chocolats, le chocolatier doit−il utiliser pour maximiser les revenus nets qu'il tirera de la vente de ses assortiments?

Exercice 5 (Voir la solution 5)**.** Une entreprise disposant de 10 000 m^2 de carton en réserve, fabrique et commercialise 2 types de boîtes en carton. La fabrication d'une boîte en carton de type 1 ou 2 requiert, respectivement, 1 et 2 m^2 de carton ainsi que 2 et 3 minutes de temps d'assemblage. Seules 200 heures de travail sont disponibles pendant la semaine à venir. Les boîtes sont agrafées et il faut quatre fois plus d'agrafes pour une boîte du second type que pour une du premier. Le stock d'agrafes disponible permet d'assembler au maximum 15 000 boîtes du premier type. Les boîtes sont vendues, respectivement, 3$ et 5$.

1. Formuler le problème de la recherche d'un plan de production maximisant le chiffre d'affaires de l'entreprise sous forme d'un programme linéaire.

2. Déterminer un plan de production optimal en résolvant graphiquement le programme linéaire trouvé en (1).

Exercice 6 (Voir la solution 6)**.** Un professionnel de tourisme installé au sud a la possibilité de vendre 500 cartes postales et 20 guides touristiques, il possède deux lots publicitaires, lot N_1 constitué d'un seul guide touristique et 10 cartes postales et un lot N_2 constitué d'un seul guide touristique et 50 cartes postales, Son bénéfice unitaire par lot est 60 DA par lot N_1 et 100 DA par lot N_2.

- Modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire et combien faut-il constituer de lot de chaque type pour maximiser le bénéfice total?

Exercice 7 (Voir la solution 7)**.** Pour nourrir sa vache, un paysan dispose de deux poudres alimentaires P1 et P2 composées d'ingrédients A, B et C. Un sac de poudre P1 pèse 900 g et contient 100 g d'ingrédients A, 200 g de B et 600 g de C. Un sac de poudre P2 pèse 600 g et contient 200 g de chacun des trois ingrédients. Chaque jour, la vache doit consommer au moins 300 g de A, 500 g de B et 700 g de C. Les prix respectifs par kg de P1 et P2 sont respectivement 300 DA, et 200 DA.

- Quelle dépense journalière minimale le paysan doit-il envisager, de sorte que sa vache reçoive une nourriture suffisante?

Exercice 8 (Voir la solution 8)**.** Un oléiculteur désire exporter deux types de l'huile d'olive, huile d'olive ordinaire et huile d'olive de haute qualité. Compte tenu des réglementations en vigueur des exportations, il n'a la possibilité de vendre qu'au maximum 5000 litres de l'huile ordinaire et 1000 litres de l'huile de qualité par année. Il propose à ses clients trois types de packs (fardeaux).

a Pack 1 est composé de deux bouteilles (1litre) d'huile simple et de quatre bouteilles d'huile de qualité. La marge brute par pack 1 est de 4 dollar.

b Pack 2 est composé de six bouteilles d'huile de qualité. La marge brute par pack 2 est de 10 dollar.

c Pack 3 est composé de six bouteilles d'huile ordinaire. La marge brute par pack 3 est de 3 dollar.

- Aider cet oléiculteur à savoir combien de pack de chaque type doit-il constituer afin de maximiser son bénéfice annuel?

Exercice 9 (Voir la solution 9)**.** Une entreprise d'investissement souhaite investir exactement 100000 dollars dans 3 projets différents, elle souhaite investir 60000 dollars dans l'achat d'un bien immobilier qui génère un bénéfice de 2900 dollars et dans l'achat d'actions boursières qui coûtent 2000 dollars/action et dégage un profit de 800 dollars/action et dans l'achat de lot de terrain qui coûtent 300 dollars/m^2 et génère un profit de 100 dollars.

- Modéliser ce problème afin de trouver le profit maximum de cet investissement?

Exercice 10 (Voir la solution 10)**.** Une usine dispose de trois machines A, B et C. La machine A permet de faire de la gelée d'abricots, la machine B de la confiture de fraises et de la gelée de fraises et la machine C traite les déchets produits par A et B.

La machine A est alimentée par un mélange composé à 60% d'abricots et à 40% de sucre et peut traiter au plus 15 tonnes de mélange par jour ; pour une tonne de mélange, elle produit 800kg de gelée et 200kg de déchets. La machine B est alimentée par un mélange composé à 80% de fraises et à 20% de sucre et peut traiter au plus 10 tonnes de mélange par jour ; pour une tonne de mélange, elle produit 600kg de confiture, 300kg de gelée et 100kg de déchets.

Tous ces déchets doivent être éliminés à l'aide de la machine C qui peut en traiter au plus 2 tonnes par jour.

L'usine achète des abricots, des fraises et du sucre aux prix respectifs de 3000\$, 3500\$ et 1200\$ la tonne. Elle vend la tonne de gelée d'abricots à 4500\$, celle de gelée de fraises à 5000\$ et celle de confiture de fraises à 4000\$.

On recherche un plan de production journalier maximisant le bénéfice de l'usine.

1. Formuler ce problème sous la forme d'un programme linéaire (PL).

2. Déterminer un plan de production journalier optimal en résolvant graphiquement le PL.

Corrections

Solution 1.

Variables de décision

1. x_1 le nombre de tables à fabriquer par semaine.

2. x_2 le nombre de chaises à fabriquer par semaine.

Les contraintes

- $5x_1 + 2x_2 \leq 60$ pour le bois
- $2x_1 + 1x_2 \leq 30$ pour le métal
- $3x_1 + 1.5x_2 \leq 45$ pour le temps du travail
- les variables sont non-négatives $x_1, x_2 \geq 0$

La fonction objectif

La fonction objectif est $Z(x_1, x_2) = 2000x_1 + 1200x_2$ à maximiser.

Enfin, le PL peut s'écrire comme suit: $\begin{cases} Z(\max) = & 2000x_1 + 1200x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 & \leq 60 \\ 2x_1 + 1x_2 & \leq 30 \\ 3x_1 + 1.5x_2 & \leq 45 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$

Solution 2.

Variables de décision

1. x_1 le nombre de ceintures de type A à fabriquer par jour.

2. x_2 le nombre de ceintures de type B à fabriquer par jour.

Les contraintes

- $2x_1 + x_2 \leq 1000$ pour le temps
- $x_1 + x_2 \leq 1400$ pour le cuir
- $x_1 \leq 800$ pour les boucles de type A.
- $x_2 \leq 900$ pour les boucles de type B.
- les variables sont non-négatives $x_1, x_2 \geq 0$

La fonction objectif
La fonction objectif est $Z(x_1, x_2) = 200x_1 + 150x_2$ à maximiser.

Enfin, le PL peut s'écrire comme suit: $\begin{cases} Z(\max) = & 200x_1 + 150x_2 \\ 2x_1 + x_2 & \leq 1000 \\ x_1 + x_2 & \leq 1400 \\ x_1 & \leq 800 \\ \quad\quad x_2 & \leq 900 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$

Solution 3.
Variables de décision

1. x_1 Le nombre d'avions loués du type A.

2. x_2 le nombre d'avion loués de type B.

Les contraintes

- $x_1 \leq 12$ Nombre d'avions disponibles du type A.
- $x_1 \leq 9$ Nombre d'avions disponibles du type B.
- $200x_1 + 100x_2 \geq 1600$ Toutes les personnes doivent être transportées.
- $6x_1 + 6x_2 \geq 90$ Tous les bagages doivent être transportés.
- les variables sont non-négatives $x_1, x_2 \geq 0$

La fonction objectif
La fonction objectif est $Z(x_1, x_2) = 800000x_1 + 200.000x_2$ à minimiser.

Enfin, le PL peut s'écrire comme suit: $\begin{cases} Z(\max) = & 800.000x_1 + 200.000x_2 \\ x_1 & \leq 12 \\ \quad\quad x_2 & \leq 9 \\ 200x_1 + 100x_2 & \geq 1600 \\ 6x_1 + 6x_2 & \geq 90 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$

Solution 4.
Variables de décision

1. x_1 La quantité de chocolat 1 dans l'assortiment (en Kg).

2. x_2 La quantité de chocolat 2 dans l'assortiment (en Kg).

3. x_3 La quantité de chocolat 3 dans l'assortiment (en Kg).

Pour se faire, on note "A", l'assortiment réalisé, $A = x_1 + x_2 + x_3$. **Les contraintes**

- $0.10 * A \leq x_1 \leq 0.20 * A$ quantité du chocolat 1 dans l'assortiment.
- $x_1 + x_2 \leq 0.800$ La quantité du chocolat 1 et 2 dans un kg de l'assortiment.
- $x_1 + x_2 \geq \frac{1}{2} * A$ Quantité du chocolat 1 et 3.
- les variables sont non-négatives $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

La fonction objectif
La fonction objectif est $Z(x_1, x_2, x_3) = 800(x_1 + x_2 + x_3) - 400x_1 - 140,5x_2 - 240x_3$ à maximiser.
Enfin, le PL peut s'écrire comme suit:

$$\begin{cases} Z(\max) = & 800(x_1 + x_2 + x_3) - 400x_1 - 140.5x_2 - 240x_3 \\ 0.10 * (x_1 + x_2 + x_3) \leq x_1 & \leq 0.20 * (x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1 + x_2 & \leq 0.800 \\ x_1 + x_2 & \geq \frac{1}{2} * (x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{cases}$$

Solution 5. 1. **Formuler le problème de la recherche d'un plan de production maximisant le chiffre d'affaires de l'entreprise sous forme d'un programme linéaire.**

(a) Soient les variables de décision suivantes:
x_1: le nombre de boîtes de type 1 fabriquées;
x_2: le nombre de boîtes de type 2 fabriquées.

(b) On a les contraintes suivantes:
sur les m^2 de carton: $x_1 + 2x_2 \leq 10000$
sur le temps d'assemblage en minutes : $2x_1 + 3x_2 \leq 200 \times 60$
sur le nombre d'agrafes: $x_1 + 4x_2 \leq 15000$

(c) La fonction objectif à maximiser correspond au chiffre d'affaires obtenu lors de la vente des cartons: $z = 3x_1 + 5x_2$

On a donc le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} Z(max) &= 3x_1 + 5x_2 \\ s.c \quad & x_1 + 2x_2 \leq 10000 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 12000 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 15000 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2. **Déterminer un plan de production optimal en résolvant graphiquement le programme linéaire trouvé en (1).**

Il suffit de représenter le domaine admissible D du programme linéaire trouvé en (1) et de trouver sur le bord de D le point qui maximise $3x_1 + 5x_2$, c'est-à-dire de faire glisser la droite d'équation $3x_1+5x_2 = \alpha$ jusqu'à ce que α soit maximal en prenant garde que cette droite intersecte le domaine D, ou bien de prendre le dernier point toucher par les droites perpendiculaires au gradient $\nabla Z = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Ceci est fait sur la figure ci-dessous, et l'on voit que le plan optimal consiste donc à produire 600 boîtes de type 1 ($x_1^* = 600$) et 3 600 boîtes de type 2 ($x_2^* = 3600$), pour un chiffre d'affaires d'une valeur de 19800$ ($z^* = 19800$).

Solution 6.
Variables de décision

1. x_1 le nombre de lots de type N_j à constituer, j=1,2.

Les contraintes

- $x_1 + x_2 \leq 20$ pour les guides
- $10x_1 + 50x_2 \leq 500$ pour les cartes postales

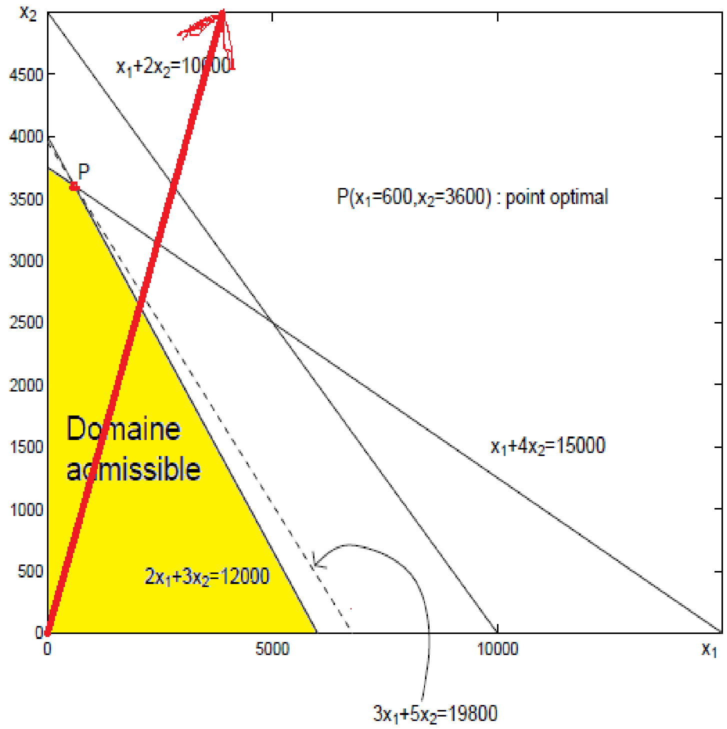

Figure 1: Résolution graphique du problème (P)

- les variables sont non-négatives $x_1, x_2 \geq 0$

La fonction objectif

La fonction objectif est $Z(x_1, x_2) = 60x_1 + 100x_2$ à maximiser.
Enfin, le PL peut s'écrire comme suit:

$$\begin{cases} Z(\max) = & 60x_1 + 100x_2 \\ x_1 + x_2 & \leq 20 \\ 10x_1 + 50x_2 & \leq 500 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

Solution 7.

Variables de décision

1. x_j nombre de sac de poudre P_j à acheter, j=1,2.

Les contraintes

- $100x_1 + 200x_2 \geq 300$ pour l'ingrédient A.
- $200x_1 + 200x_2 \geq 500$ pour l'ingrédient B.
- $600x_1 + 200x_2 \geq 700$ pour l'ingrédient C.
- Les variables sont non-négatives $x_1, x_2 \geq 0$

La fonction objectif

La fonction objectif est $Z(x_1, x_2) = 300 * 0.9 * x_1 + 200 * 0.6 * x_2$ à maximiser.
Il suffit d'appliquer la règle de trois pour trouver les prix en Kg.
Enfin, le PL peut s'écrire comme suit:

$$\begin{cases} Z(\max) = & 60x_1 + 100x_2 \\ 100x_1 + 200x_2 & \geq 300 \\ 200x_1 + 200x_2 & \geq 500 \\ 600x_1 + 200x_2 & \geq 700 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

Remarque 1. On peut aussi prendre comme variable de décision, les quantité à acheté en Kg, mais, il faut faire attention à exprimer toute les contraintes en Kg.

Solution 8.
Variables de décision

1. x_j nombre de packs (Fardeaux) de type F_j à exporter, $j = \overline{1,3}$.

Les contraintes

- $2x1 + 6x2 \leq 5000$ pour l'huile simple.
- $4x1 + 6x3 \leq 1000$ pour l'huile de qualité.
- Les variables sont non-négatives $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

La fonction objectif
La fonction objectif est $Z(x_1, x_2) = 4x_1 + 10x_2 + 3x_3$ à maximiser.
Enfin, le PL peut s'écrire comme suit:

$$\begin{cases} Z(\max) = & 4x_1 + 10x_2 + 3x_3 \\ 2x1 + 6x2 & \leq 5000 \\ 4x1 + 6x3 & \leq 1000 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{cases}$$

Solution 9.
Variables de décision

1. $x_1 = \begin{cases} 1, & \text{Si le bien immobilier est acheté} \\ 0, & \text{Sinon} \end{cases}$ x_2 nombre d'actions achetées,

3. x_3 nombre de m^2 de terre achetées,

Les contraintes

- $60000x1 + 2000x2 + 300x_3 = 10000$ Il ne faut pas dépasser le budget alloué.
- Les variables sont non-négatives et d'intégrité $x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1 \in \{0, 1\}, x_2 \in N$

La fonction objectif
La fonction objectif est $Z(x_1, x_2) = 2900x_1 + 800x_2 + 100x_3$ à maximiser.
Enfin, le PL peut s'écrire comme suit:

$$\begin{cases} Z(\max) = & 2900x_1 + 800x_2 + 100x_3 \\ 60000x1 + 2000x2 + 300x_3 & = 100000 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & x_1 \in \{0, 1\}, x_2 \in N \end{cases}$$

Remarque 2. Si vous mettez aussi $x_i \in N$, est acceptable comme réponses.

Solution 10.
Soit les variables de décision:

- x_1 = tonnes de mélange traitées par la machine A,
- x_2 = tonnes de mélange traitées par la machine B,

On en déduit :

- la quantité d'abricots à acheter : $0.6x_1$

- la quantité de fraises à acheter : $0.8x_2$
- la quantité de sucre à acheter : $0.4x_1 + 0.2x_2$
- la quantité de gelée d'abricots produite : $0.8x_1$
- la quantité de confiture de fraises produite : $0.6x_2$
- la quantité de gelée de fraises produite :$0.3x_2$
- la quantité de déchets produits : $0.2x_1 + 0.1x_2$

Toutes ces quantités sont exprimées en tonnes.
On a donc la fonction objectif suivante, correspondant au bénéfice journalier en $:

$$\begin{aligned} Z &= 4500.0,8x_1 + 5000.0,3x_2 + 4000.0,6x_2 - 3000.0,6x_1..3500.0,8x_2 - 1200(0,4x_1 + 0,2x_2) \\ &= 1320x_1 + 860x_2 \end{aligned}$$

Les contraintes sur les machines A, B et C:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 15 \\ x_2 &\leq 10 \\ 0,2x_1 + 0,1x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

Le programme linéaire à résoudre est donc:

$$\begin{aligned} \max Z &= 1320x_1 + 860x_2 \\ s.c. &\quad x_1 \leq 15 \\ &\quad x_2 \leq 10 \\ &\quad 0,2x_1 + 0,1x_2 \leq 2 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

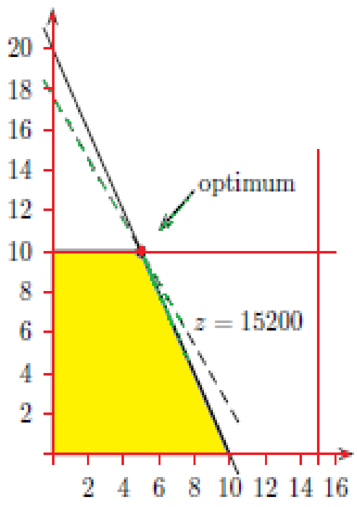

Figure 2: Représentation graphique du problème

La solution optimale est donnée par :

$$z^* = 15200,\ x_1^* = 5,\ et\ x_2^* = 10.$$

ce qui correspond à fournir 5 tonnes de mélange à la machine A et 10 tonnes de mélange à la machine B pour un bénéfice journalier de 15200$.

On peut aussi formuler le problème avec comme variables de décisions: x_1, x_2 qui représentent le nombre de tonnes d'abricots et de fraises achetés chaque jour par l'usine. Ou, la quantité de gelée d'abricots et de fraises produite en tonnes