Université M'hamed Bougara de Boumerdes
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Deuxième année Licence Recherche Opérationnelle

2011/2012

Semestre 04

Correction de l'Examen final d'Optimisation Linéaire

Exercice $N°1$: $8points = 1 + 2 + 2 + 1 + 2$

L'entreprise HAMMOUD Boualam produit trois types de Boissons, Type A, Type B, Type C. Les prix de vente, les quantités requises de concentré de jus et d'arômes ainsi que le nombre d'heures de fabrication sont différents pour chaque type et sont résumés dans le tableau suivant :

	Type A	Type B	Type C
Temps de Fabrication [min]	4	2	12
Quantité de Concentré de Jus [ml]	100	150	100
Quantité d'Arômes [g]	20	10	40
Prix de vente [DZD]	48	36	90

Pour sa fabrication hebdomadaire, l'entreprise dispose de :

- ✍ 3000 minutes de travail
- ✍ 100 Litres de concentré de jus
- ✍ 12 kg d'arômes.

Questions :

1. Formuler un programme linéaire aidant la fabrique à déterminer une production maximisant son chiffre d'affaires.
2. Donner le programme linéaire dual du problème précédent.
3. Résoudre le programme primal.
4. Donner la solution optimale du programme dual.
5. Si la fabrique pouvait augmenter la quantité de ressources en concentré de jus ou en arôme, dans laquelle de ces deux ressources serait-il conseillé d'investir en premier ? (Justifiez votre réponse).

Correction $N°1$: 8 Points

1. **Formuler un programme linéaire aidant la fabrique à déterminer une production maximisant son chiffre d'affaires**
   (a) **Définition des variables de décisions :**

      ✍ x_1 : nombre de boissons de type A produites

✍ x_2 : nombre de boissons de type B produites

✍ x_3 : nombre de boissons de type C produites

(b) Interprétation des contraintes :

☞ $4x_1 + 2x_2 + 12x_3$, contrainte sur le temps disponible

☞ $100x_1 + 150x_2 + 100x_3 \leq 100000$, Contrainte sur la disponibilité en quantité de concentré de Jus.

☞ $20x_1 + 10x_2 + 40x_3 \leq 12000$, contrainte sur quantité de d'arôme disponible.

☞ $x_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}$, on ne peut pas avoir des quantité négatives.

(c) La fonction économique est : $48x_1 + 36x_2 + 90x_3$

(d) Le plan de production maximisant le chiffre d'affaires est solution du programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} Z(\max) = & 48x_1 + 36x_2 + 90x_3 \\ s.c. & 4x_1 + 2x_2 + 12x_3 \leq 3000 \\ & 100x_1 + 150x_2 + 100x_3 \leq 100000 \\ & 20x_1 + 10x_2 + 40x_3 \leq 12000 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2. Son dual est :

$$\begin{cases} W(\min) = & 3000y_1 + 100000y_2 + 12000y_3 \\ s.c. & 4y_1 + 100y_2 + 20y_3 \geq 48 \\ & 2y_1 + 150y_2 + 10y_3 \geq 36 \\ & 12y_1 + 100y_2 + 40y_3 \geq 90 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

3. L'algorithme du simplexe nous donne les tableaux suivants :

---

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Ratio
x_4	4	2	**12**	1	0	0	3000	250 $\rightsquigarrow$
x_5	100	150	100	0	1	0	100000	1000
x_6	20	10	40	0	0	1	12000	600
$-Z$	48	36	90 $\uparrow$	0	0	0	0	

---

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Ratio
x_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{12}$	0	0	250	1500
x_5	$\frac{200}{3}$	$\frac{400}{3}$	0	$\frac{-25}{3}$	1	0	75000	$562,5$ $\rightsquigarrow$
x_6	$\frac{20}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{-10}{3}$	0	1	2000	600
$-Z$	18	21 $\uparrow$	0	$\frac{-15}{2}$	0	0	-22500	

---

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Ratio
x_3	$\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{3}{32}$	$-\frac{1}{800}$	0	$\frac{625}{4}$	625
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{16}$	$\frac{3}{400}$	0	$\frac{1125}{2}$	1125
x_6	5	0	0	$-\frac{25}{8}$	$-\frac{1}{40}$	1	125	25 $\rightsquigarrow$
$-Z$	$\frac{15}{2}\uparrow$	0	0	$-\frac{99}{16}$	$-\frac{63}{400}$	0	$-\frac{68625}{2}$	

---

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$*$	$-\frac{1}{20}$	150
x_2	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{10}$	550
x_1	1	0	0	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{5}$	25
$-Z$	0	0	0	-$\frac{3}{2}$	-$\frac{3}{25}$	-$\frac{3}{2}$	-34500

Ce dernier tableau est optimal, et le plan de production :

- ☞ $x_1^* = 25$: boissons de type A,
- ☞ $x_2^* = 550$: boissons de type B,
- ☞ $x_3^* = 150$: boissons de type C,

4. La solution optimale duale se lit dans la dernière ligne du dernier tableau du simplexe :

$$y_1^* = \frac{3}{2}, y_2^* = \frac{3}{25}, y_3^* = \frac{3}{2}, y_4^* = y_4^* = y_4^* = 0, w^* = 34500$$

5. Le coût marginal associé au cocentré de jus est $y_2^* = \frac{3}{25}$ et celui associé au arômes est $y_3^* = \frac{3}{2}$. Il est donc préférable d'essayer d'investir en premier dans la quantité d'arôme disponible, car pour une augmentation égale, l'impact sur le chiffre d'affaires sera plus important.

Exercice $N°2$: $8points = 2+2+2+2$

Soit le programme linéaire :

$$(P) : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = Z(Max) \\ x_1 + x_2 & \geq -5 \\ -6x_1 + 7x_2 & \leq 4 \\ x_1 + x_2 & = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \in \Re. & \end{cases}$$

1. Mettre le programme linéaire sous forme canonique.
2. Mettre le programme linéaire sous forme standard.
3. Déterminer le problème dual de (P).
4. Résoudre Graphiquement le problème (P)

Correction de l'exercice $N°2$

Soit le programme linéaire :

$$(P):\begin{cases} 2x_1+3x_2 & = Z(Max) \\ x_1+x_2 & \geq -5 \\ -6x_1+7x_2 & \leq 4 \\ x_1+x_2 & = 10 \\ x_1\geq 0, x_2\in\Re. \end{cases}$$

1. **Mettre le programme linéaire sous forme canonique.**

$$(P):\begin{cases} 2x_1+3x_2 & = Z(Max) \\ -x_1-x_2 & \leq 5 \\ -6x_1+7x_2 & \leq 4 \\ x_1+x_2 & \leq 10 \\ x_1+x_2 & \geq 10 \\ x_1\geq 0,\ x_2=x'_2-x"_2,\ x'_2\geq 0,\ x"_2\geq 0 \end{cases}$$

$$(P):\begin{cases} 2x_1+3x'_2-3x"_2) & = Z(Max) \\ -x_1-x'_2+x"_2 & \leq 5 \\ -6x_1+7x'_2-7x"_2 & \leq 4 \\ x_1+x'_2-x"_2 & \leq 10 \\ -x_1-x'_2+x"_2 & \leq -10 \\ x_1\geq 0,\ x_2=x'_2-x"_2,\ x'_2\geq 0,\ x"_2\geq 0 \end{cases}$$

Qui est la forme canonique du problème (P).

2. **Mettre le programme linéaire sous forme standard.**

$$(P):\begin{cases} 2x_1+3x_2 & = Z(Max) \\ -x_1-x_2 & \leq 5 \\ -6x_1+7x_2 & \leq 4 \\ x_1+x_2 & = 10 \\ x_1\geq 0,\ x_2=x'_2-x"_2,\ x'_2\geq 0,\ x"_2\geq 0 \end{cases}$$

$$(P):\begin{cases} 2x_1+3x'_2-3x"_2 & = Z(Max) \\ -x_1-x'_2+x"_2+x_3 & = 5 \\ -6x_1+7x'_2-7x"_2+x_4 & = 4 \\ x_1+x'_2-x"_2 & = 10 \\ x_1\geq 0,\ x_2=x'_2-x"_2,\ x'_2\geq 0,\ x"_2\geq 0 \end{cases}$$

3. **Déterminer le problème dual de (P).**

$$(P):\begin{cases} -5y_1+4y_2+10y_3 & = W(\min) \\ y_1-6y_2+y_3 & \geq 2 \\ y_1+7y_2+y_3 & = 3 \\ y_1\leq 0,\ y_2\geq 0,\ y_3\in\Re. \end{cases}$$

4. Résoudre Graphiquement le problème (P)

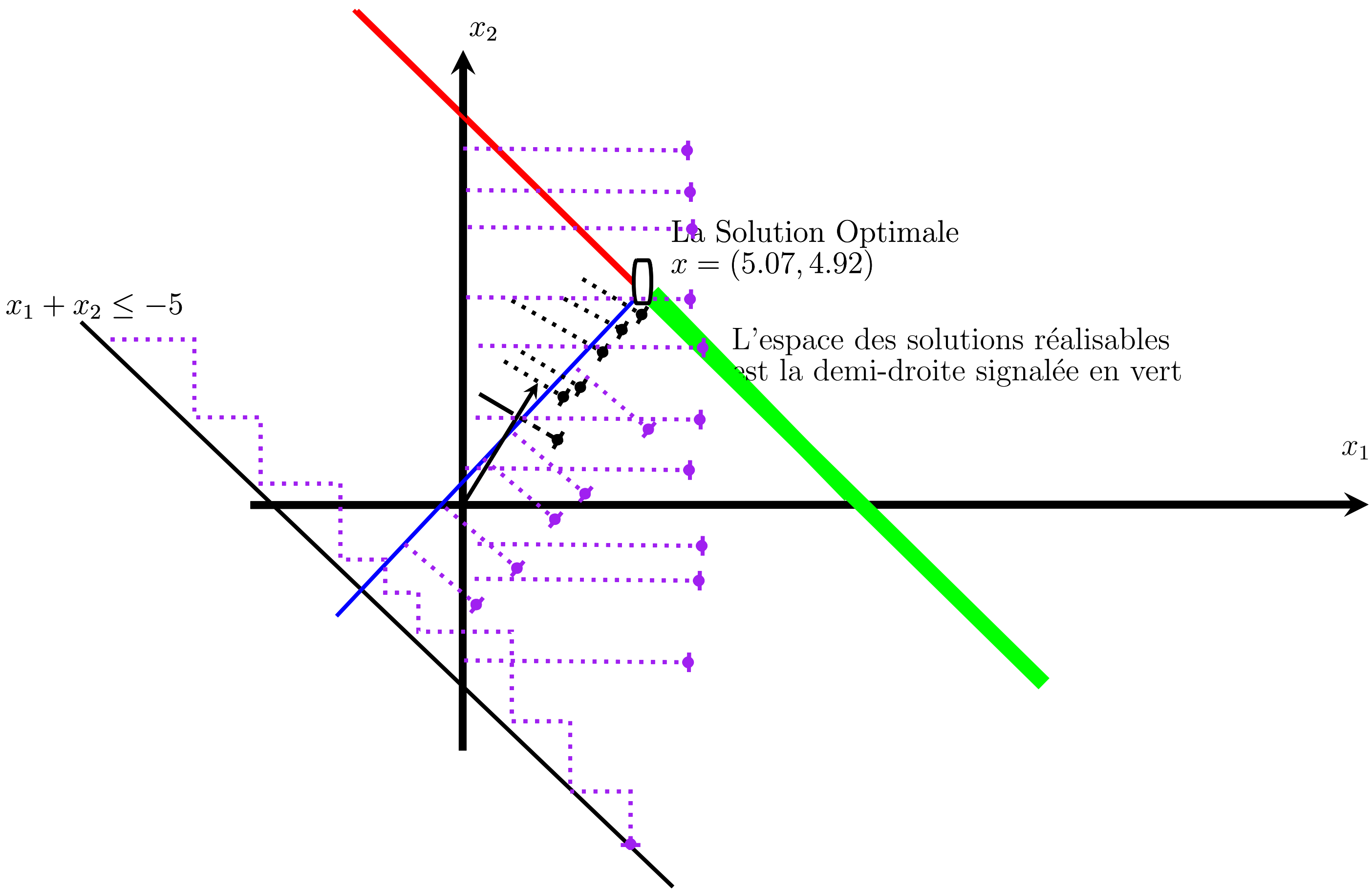

FIGURE 1 – Représentation graphique

Exercice $N°3$: $4points = 1+1+1+1$

Pour chacun des tableaux de simplexe suivants : (Les tableaux sont indépendants entres eux, justifiez toutes vos réponses)

Tab_1 :

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_6	1	0	-3	-1	0	1	-1
x_5	-1	0	-2	2	1	0	$-\frac{1}{2}$
x_2	4	1	1	-4	0	0	0
-Z	-3	0	-6	0	0	0	-9

Tab_2 :

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_6	0	0	-6	$-\frac{3}{2}$	1	1	2
x_1	1	0	4	0	1	0	3
x_3	0	1	2	-3	-2	0	1
-Z	0	0	0	2	$-\frac{3}{2}$	0	-12

Tab_3 :

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	3	2	0	1	0	2
x_4	0	4	$\frac{1}{3}$	1	1	0	3
x_6	0	2	2	0	2	1	1
-Z	0	-1	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	-8

Tab_4 :

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_2	1	1	$\frac{3}{2}$	3	0	0	-2
x_5	$\frac{1}{2}$	0	1	1	1	0	3
x_6	$\frac{3}{2}$	0	3	$\frac{3}{2}$	0	1	-1
$-Z$	-1	0	-2	-1	0	0	-5

➶ **Déterminer si le tableau est : Réalisable, Optimal, Non-borné, Dégénéré.**

Tableau	Réalisable	Optimal	Borné	Dégénéré
Tab_1	NON($\exists x_B^i < 0$)			OUI $\exists x_B^i = 0$
Tab_2	OUI (*tout les* $x_B^i \geq 0$)	NON ($\exists C_j^i > 0$)	NON ()	NON
Tab_3	OUI	OUI	OUI	NON
Tab_4	NON			NON

$\vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge$

Corrigé Par. M. BEZOUI

$\vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge$