Université de M'hamad Bougara de Boumerdès
Faculté des Sciences
Deuxième Année Licence
Recherche Opérationnelle
Département de Mathématiques
Responsable du Module:
Mr. M. BEZOUI

Examen Final d'Optimisation Linéaire

Exercice N°01:(11 Points=2+(1+1)+2+(1+1)+1+(1+1))

Considérons le programme linéaire (P_λ), où $\lambda \geq 0$:

$$(P_\lambda):\begin{cases} Z(max) = 2x_1 + x_2 + \lambda x_3 & \\ s.t. \quad x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq 6 \\ \quad 2x_1 + x_2 + 5x_3 & \leq 8 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{cases}$$

1. Étudier, en fonction de λ, la variation de la solution optimale.
2. Soit (P_1) le problème obtenu pour $\lambda = 1$:
   - 2.1 Trouver (en utilisant la question précédente) la solution optimale du problème (P_1). La solution est-elle unique? (justifiez!)
   - 2.2 Écrire le problème (D_1), le dual de (P_1).
   - 2.3 En utilisant le tableau final obtenu dans la question 2.2, déduire la solution optimale du problème (D_1), vérifier le résultat graphiquement.
   - 2.4 Vérifier que le théorème fort de la dualité est vérifié.
   - 2.5 La solution $x = \begin{pmatrix} 2, & 4, & 0 \end{pmatrix}^T$ est-elle une solution de base réalisable pour (P_1)? Est-elle optimale pour (P_1)?

Exercice N°02: (06 Points=1+2+(1+1+1))

Partie 1.

Soit le problème de programmation linéaire suivant:

$$(P):\begin{cases} Z(max) = 2x_1 - x_2 + x_3 & \\ 3x_1 - x_2 + x_3 & =1 \\ x_1 + x_2 & =5 \\ 2x_1 - x_2 & =3 \\ x_j \geq 0 & j = \overline{1,3} \end{cases}$$

1. Écrire le problème auxiliaire correspondant à (P).
2. Résoudre par la méthode des deux phases du simplexe le problème (P).

Partie 2.

Ce qui suit, est le tableau final de la phase 1 du simplexe, d'une résolution d'un problème de programmation linéaire. Où, t_1 et t_2 sont des variables artificielles pour deux des trois contraintes du problème.

X			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
C			0	0	0	-1	-1
C_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	a_1	$\frac{7}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
0	a_2	$\frac{7}{2}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
-1	a_5	α	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
$Z=\lambda$		E	0	0	β	δ	0

Trouver les conditions pour les paramètres $\alpha, \beta, \lambda, \delta$ tel que les énoncés suivants sont vrais.

1. Le problème est irréalisable.
2. Le problème est réalisable.
3. Le problème est réalisable mais il contient une contrainte redondante.

Exercice N°03: (03 Points=1.5+1.5)

1. Soient l'ensemble M défini par:

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n,\ Ax = b,\ x \geq 0\}.$$

☛ Démontrer que M est un ensemble convexe.

2. Soit le programme linéaire (P) et son dual (D) définis comme suit:

$$(P) : \begin{cases} Z(max) = c^T x \\ Ax = b \qquad\qquad x \geq 0 \end{cases} \qquad (D) : \begin{cases} W(min) = b^T y \\ A^T.y \geq c \qquad\qquad y \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

☛ Démontrez que pour toute solution réalisable x de (P) et pour toute solution réalisable y de (D) on ait:

$$c^T.x \leq b^T.y.$$

Bon Courage.