Université de M'hamad Bougara de Boumerdès
Faculté des Sciences
Deuxième Année Licence
Recherche Opérationnelle
Département de Mathématiques
Responsable du Module:
Mr. M. BEZOUI

Correction de l'Examen Final d'Optimisation Linéaire

Exo 1: (05 Points=2+2+1), Exo 2: (09 Points=3+1+1+2+1+1), Exo 3: (06 Points=2+1+1+2)

Exercice N°01

1. Modélisation:
   x_1 : nombre de CD produits, x_2: Nombre de DVD produits.

$$\begin{cases} Max(Z) = & 30x_1 + 40x_2 \\ s.t. & x_1 + 2x_2 \leq 200 \text{ (Matière première)} \\ & 5x_1 + 6x_2 \leq 420 \text{ (Temps disponible sur la machine de métallisation)} \\ & 4x_1 + 6x_2 \leq 420 \text{ (Temps disponible sur la machine de vernissage)} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

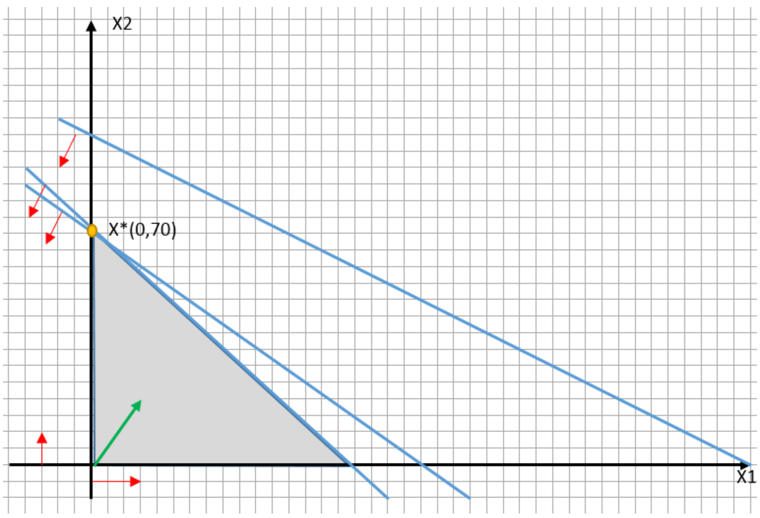
2. 

Figure 1: Résolution graphique

3. Oui, il existe des contraintes redondantes, qui sont: la première et la troisième. Si on les supprime on obtient le même ensemble de définition, Voire le graphe.

Exercice N°02

Forme standard (P_λ) :
$$\begin{cases} Z(max) = 2x_1 + \lambda x_2 \\ s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ \qquad x_2 + x_4 = 3 \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

1.

	C	2	λ	0	0	
C_b	B	x_1	x_2	x_3	x_4	b
2	x_1	1	1	1	0	4
0	x_4	0	1	0	1	3
	Δ	0	λ-2	-2	0	8

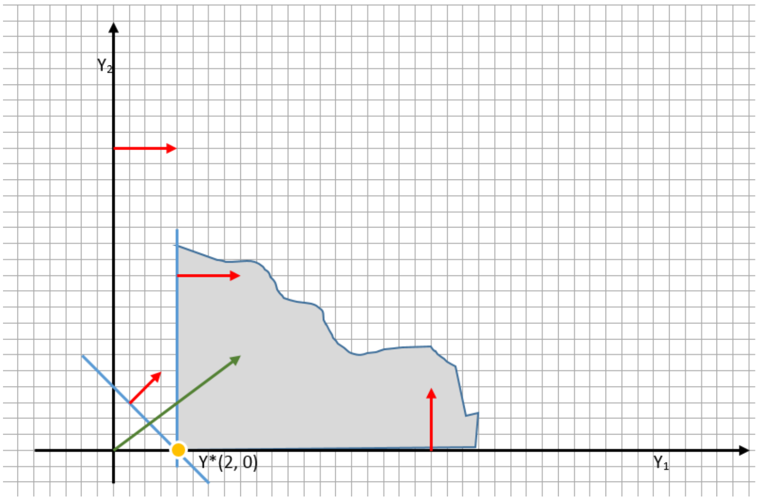


Figure 2: Résolution du problème dual

Si $\lambda \leq 2$, alors la solution actuelle $x = (4, 0, 0, 3)$. Sinon, si $\lambda > 2$, alors la solution actuelle n'est pas optimale, la variable entrante est alors x_2, et la variable sortante est x_4 ($\min\{\frac{4}{1}, \frac{3}{1}\} = 3$). On aura alors le tableau suivant:

	C	2	λ	0	0	
C_b	B	x_1	x_2	x_3	x_4	b
2	x_1	1	0	1	-1	1
λ	x_2	0	1	0	1	3
	Δ	0	0	-2	2-λ	2+3λ

Comme $\lambda > 2$, alors, $\Delta \leq$ car $2 - \lambda \leq 0$, la solution actuelle $x^* = (1, 3, 0, 0)$ est optimale.

2.1 La solution optimale de (P_2) est $x = (4, 0, 0, 3)$.

2.2 La solution n'est pas unique car il existe une variable hors base (x_2), dont le coût réduit $\Delta_2 = 0$.

2.2.1 Si on introduit x_2 dans la base, on aura $x^{*(2)} = (1300)$.

2.3 Le problème dual est:

$$(D_2)\begin{cases} Min(W) & 4y_1 + 3y2 \\ & y_1 + 0y_2 \geq 2 \\ & y_1 + y_2 \geq 2 \\ & y_1 \geq 0 \\ & y_1 \geq 0 \end{cases}$$

2.4 Vérification du théorème fort de la dualité: La solution est $y^* = (2, 0)$, la valeur de la fonction objectif est: $W^* = 8 = Z^*$, alors le théorème fort de la dualité est vérifié.

2.5 D'après le graphe, on remarque que le point (1,1) appartient à l'intérieur de l'ensemble de définition, alors,le point est réalisable, mais, ce point n'est pas un point extrême, alors, il n'est pas solution de base donc pas optimal.

Exercice N°03

1. Résolution du problème (P_3):

   (a) Ecriture du problème sous forme standard:

$$(P_3):\begin{cases} Z(max) = 10x_1 + 2x_2 & \\ \qquad 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 & = 10 \\ \qquad 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 & = 4 \\ \qquad x_j \geq 0 & j = \overline{1,4} \end{cases}$$

(b) Formulation du problème auxiliaire:

$$(P_{aux}): \begin{cases} W(max) = -x_1 & \\ \quad 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 & = 10 \\ \quad 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 + v_1 & =4 \\ \quad x_j, v_1 \geq 0, & j = \overline{1,4} \end{cases}$$

	C	0	0	0	0	-1	
C_b	B	x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	b
0	x_4	5	2	5	1	0	10
-1	v_1	1	-1	2	0	1	4
	Δ	1	-1	2	0	0	-4

x_3 entre dans la base et x_4 sort de la base.

	C	0	0	0	0	-1	
C_b	B	x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	b
0	x_4	1	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	2
-1	v_1	-1	$\frac{-9}{5}$	0	$\frac{-2}{5}$	1	0
	Δ	-1	$\frac{-9}{5}$	0	$\frac{-2}{5}$	0	0

Le vecteur coût étant non positif, la phase 1 est terminée. Comme la fonction objectif est nulle on passe à la phase 2. Comme il existe une variable artificielle dans la base qui est égale à zéro alors on supprime la ligne et colonne correspondant à v_1 et on passe à la phase 2.

	C	10	2	0	0	
C_b	B	x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	x_4	1	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	2
	Δ	10	2	0	0	0

x_1 entre dans la base et x_4 sort de la base.

	C	10	2	0	0	
C_b	B	x_1	x_2	x_3	x_4	b
10	x_1	1	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	2
	Δ	0	-2	-10	-2	20

La solution optimale est $x = (2, 0, 0, 0)$.

2. Oui, la deuxième contrainte est redondante, la fin de la phase 1, $v_1 = 0 \in B$.

3. Non, le problème n'est pas dégénéré car il n'existe aucune variable de base nulle.

4. Le dual de P_3:

$$(D) \begin{cases} min(W) & 10y_1 + 4y_2 \\ & 5y_1 + y_1 \geq 10 \\ & 2y_1 - y_2 \geq 2 \\ & 5y_1 + 2y_2 \geq 0 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \in R \end{cases}$$

5. Avec la méthode graphique, on trouve la solution optimale de D est: $y = (2, 0)$, qu'on peut aussi déduire du du coût réduit du dernier tableau optimal.

Bon courage!