CHAPITRE 02 : LES PROBABILITÉS

1- Introduction

a)-les Ensembles :

Un ensemble est une collection d'objets qui partagent un même critère d'appartenance.

Exemple :

E1 : Ensemble des êtres vivants.

E2 : Ensemble des organismes microscopiques.

E3 : Ensemble des étudiants d'une même spécialité.

b)- Sous-ensemble (partie) :

Un sous-ensemble **A** de **E** est une partie de l'Ensemble **E** on dira que **A** est inclus ou contenu dans **E**, la partie **A** est variable, elle peut être vide (ϕ), où elle peut contenir l'ensemble **E** en entier.

On pourrait avoir les situations suivantes :

- **A** est inclus ou égal à **E** , on pourra noter : **A** $\subset$ **E**.
- **B** n'est pas un sous ensemble et ne fait pas partie de **E**, on pourra noter : **B** $\not\subset$ **E**
- **F** est un sous ensemble non vide et fait partie de **E**, on pourra noter :**F** $\subset$ **E et F** $\neq$ **ϕ**.

c)-les Parties d'un Ensemble :

L'ensemble de toutes les parties de l'ensemble **E** est noté : $\mathcal{P}(E)$.

***Exemple* :**

E={a,b,c} $\Rightarrow \mathcal{P}(E)$ ={ϕ ;{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}}

d)-L'Elément :

Un élément d'un Ensemble **E** est le contenu du plus petit sous ensemble non vide de **E**.

Exemple :

A= {1, 2, 3,5} _2, 3,1 et 5 sont des éléments de **A**

On note 2, 3,1et 5 $\in$A.

{2,1} est un sous ensemble de **A**, on note {2,1} $\subset$ **A** ou {2,1} $\in \mathcal{P}(A)$.

Remarque :

Une permutation des éléments d'un ensemble donné ne change pas l'ensemble. Ainsi, {3,1,5} est le même ensemble que {5,3,1} c.à.d. : {3,1,5} = {5,3,1} e)- Eléments de probabilité :

- ***Expérience et phénomène aléatoire***
  Un phénomène est dit aléatoire si l'on ne peut prédire le résultats de l'experience qui surviendra et ce même si l'on répète plusieurs fois l'experience dans les memes conditions, le mécanisme permettant d'observer un phénomène aléatoire est dit expérience aléatoire (aléa = hasard).
  Exemple :
  Lancer d'un dé, le tirage d'une carte dans un jeu.

- ***Espace fondamental***
  Soit ξ une expérience aléatoire, on appelle espace fondamental associé à ξ, l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.
  On notera cet espace par Ω.

  Exemple 01:
  Lancer d'un dé
  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

  Exemple 02
  Lancer deux (02) dés :
  $\Omega = \{(x,y) \,/\, x,y \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$

- ***Evénements***
  Tout sous-ensemble de Ω est dit évènement. Si ce sous-ensemble est constitué d'un seul élément, cet évènement est dit élémentaire.

  Exemple
  Lancer d'un dé

  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
  Soit A l'évènement suivant :
  A ‘‘ avoir un chiffre paire ‘‘
  $A = \{2,4,6\}$ $A \subset \Omega$

  $\{\phi\}$: est un évènement qui est dit :évènement impossible car il n'est jamais réalisé
  Ω : est un évènement sûre ou certain

Des évènements élémentaires sont : $\{1\}$, $\{2\},\{3\},\ldots,\{6\}$.

f)- Le Cardinal d'un ensemble :

Le cardinal d'un ensemble donné **E**, est noté card**E** ou encore **|E|** est prononcé cardinal de E, c'est le nombre d'éléments contenus dans **E**

Exemple :

Soit **E** ={1,2,3,5}.

Card**E** = |E|= Card ({1,2,3,5}) = |{1 ,2,3,5}|= 4

2- Les Operations sur les ensembles :

1-Réunion: **A**∪ **B** se lit **A** union **B**: Est l'ensemble de **A** appartenant à **A** ou à **B.**

2-Intersection :**A**∩**B** se lit **A** inter **B** : Est l'ensemble des éléments de **E** qui appartiennent à **A** et à **B**

3-Complémentaire : C_E^Ase lit comlémentaire de **A** dans **E** ($\bar{A}$) : éléments de **E** n'appartiennent pas à **A**.

3- Les problèmes de dénombrement :

Dénombrement : Calcul du nombre de cas où l'événement considéré peut se produire.

Etant donné un ensemble, le dénombrement offre des outils nécessaires au calcul du cardinal de ce dernier.

Soit une expérience à **(n)** objets qui admet beaucoup de possibilités de cette expérience

1- Arrangements :

Un élément (possibilité) de **A** comprend **P** objets est dit Arrangement s'il admet la notion d'ordre.

Notion d'ordre : Si on change l'ordre d'un objet dans cet élément, on obtient une autre possibilité qui appartient à **A**

$$\text{Card (A)} = A_n^P = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple :

Combien de tiercé peut-on composer dans une course de 20 chevaux ?

Pour un tiercé équestre, l'ordre des chevaux compte. Par contre les chevaux ne peuvent pas se répéter, en effet, aucun des chevaux sortis de la course n'y retournera, afin d'occuper deux ou plus de places dans le tiercé, il faut ternir compte de l'ordre, mais sans la répétition des éléments : Ceci est *un arrangement.*

Chaque tiercé est un arrangement de 3chevaux parmi 20, donc le nombre de tiercé est de

$$\frac{20!}{(20-3)!}=\frac{20!}{17!}= \mathbf{6840}$$

2- Arrangements avec répétitions :

Un élément de **A** est dit un arrangement avec répétition s'il admet deux notions

a)- L'ordre

b)- la Répétition dans une possibilité, un objet peut être répété plus d'une fois.

$$\text{Card (A)} = A_n^P = n^p$$

$$\text{Card (A)} = n^p$$

Exemple :

Combien de numéros de téléphone longs de 9chiffres, peut-on faire avec les chiffres de 0à9 ?

On a 10chiffre $\Rightarrow$ n=10

P =09

Q : Est-ce que l'ordre compte lors de la composition d'un numéro ?

R : Oui, donc soit nous avons un arrangement ou bien un arrangement avec répétitions .

Q : Peut-on retrouver plusieurs fois le même chiffre dans la composition d'un numéro ?

R : Oui, donc card(A) = n^p=10^9

Remarque :

Dans les arrangements avec répétition **P** peut être supérieur à **n** , par contre dans les arrangements sans répétition **P** est inferieur ou égal **n**.

N : Est le nombre d'objets de l'expérience et **P** : constitue l'ordre d'une possibilité (le nombre de positions de cette dernière).

3- Permutations de n objets : P_n

C'est le nombre de possibilités de ranger **n** objets distincts à **n** places différentes.

$$P_n = n\,!$$

(Un arrangement sans répétition où **p=n**)

Exemple :

Combien de nombres de 3 chiffres peut-on former avec les chiffres 3, 7,5 ?

Réponse : P_n=3 !=6

4- Permutations avec répétitions :

C'est la même définition des permutations, la seule différence c'est qu'ici parmi **n** objets , il y a **P** identiques.

Card (A) = $P_{n,p} = \frac{n!}{p!}$

Card (A) $= \frac{n!}{p_1!p_2!....p_n!}$

Si p_1 est identique

p_2 est identique

Exemple:

Déterminez le nombre d'anagrammes du mot **ELEVE** et du mot **AMALGAME**

ELEVE

Card $= P_n = \frac{5!}{3!}$

AMALGAME

Card $= \frac{8!}{3!.2!}$

5- Combinaisons :

Lorsque les possibilités n'admettent ni ordre ni répétition, elles sont dites Combinaisons dans ce cas :

$$\text{Card (A)} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

6- Combinaisons avec répétitions :

Lorsque la possibilité n'admet pas d'ordre, et admet la répétition elle est dite combinaison avec répétition.

$$\text{Card (A)} = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Exemple 01 :

Combien de grilles de loto peut-on remplir pour être sûre de gagner ?

Au loto, l'ordre des numéros sortants ne compte pas, on coche 6 nombres mais 49 peuvent sortir donc chaque grille est une combinaison de 6 nombres parmi 49

$$\text{Card} = C_{49}^6 = \frac{49!}{6!(49-6)!}$$

A est un élément

A= $\{P_1, P_2, \ldots P_n\}$