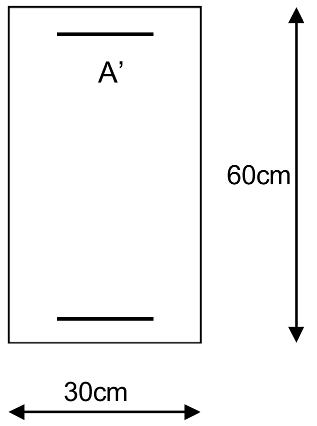
EXERCICE N°1 (SECTION ENTIEREMENT TENDUE)

Déterminer, les armatures de la section rectangulaire suivante:



- **Sollicitations :**
  - **Ng= -200 KN et Mg= 20 KN.m**
  - **Nq= -200 KN et Mq= 20 KN.m**

La durée d'application des charges est supérieure à 24 heures => θ = 1,00.

Fissuration préjudiciable.

Matériaux :

Béton F_{c28}= 25 Mpa ; Acier HAFeE500

Hauteurs utiles : d= 55 cm ; d'= 5cm

SOLUTION

- Béton F_{c28} = 25 Mpa => $F_{bu} = \frac{f_{c28}}{\gamma_b \vartheta} = 16.66\ MPa$
- Acier Fe500 : $\sigma_{su} = \frac{fe}{\gamma_s} = 434{,}78\ MPa$

- **CALCUL A L'ELU :**

- **Combinaisons d'actions à l'ELU**

Effort normal de traction: $N_u = 1.35N_g + 1.5N_q = -(1{,}35 \times 200 + 1{,}50 \times 200) = -570$ kN

Moment de flexion : $M_{gou} = 1.35Mg + 1.5M_q = 1.35 * 20 + 1.5 * 20 = 57kN.m$

- **Nature de la section.**

- N est un effort de traction.
- La position du point C est donnée par la valeur de l'excentricité e_0 :

$$\boldsymbol{e_{0u} = \frac{M_{gou}}{N_u} = -0.1m\ ;\ d - \frac{h}{2} = 0.55 - 0.30 = 0.25\ m}$$

$$e_{0u} < d - \frac{h}{2}$$

Le point C est situé entre les deux nappes d'armatures longitudinales, on est donc bien dans le cas d'une section entièrement tendue.

- **Calcul des excentricités.**

Le calcul des excentricités nous donne :

$$e_{A1} = \frac{h}{2} - d' + |e_u| = 0.35m$$
$$e_{A2} = \frac{h}{2} - (h - d) - |e_u| = 0.15m$$

- **Calcul des armatures**

Pour la nappe supérieure

$$A_{1u} = \frac{N_u e_{A2}}{(e_{A1} + e_{A2})\sigma_{su}} = 3{,}93\ Cm^2$$

Pour la nappe inférieure :

$$A_{2u} = \frac{N_u e_{A2}}{(e_{A1} + e_{A2})\sigma_{su}} = 9.17\ Cm^2$$

<u>JUSTIFICATION A L'ELS :</u>

- **Combinaisons d'actions à l'ELS**
  - Effort normal de traction: $N_{ser} = N_g + N_q$= – (200 + 200)= - 400 kN
  - Moment de flexion : $M_{gser} = Mg + M_q = 20 + 20 = 40\ kN.m$

- **Nature de la section.**

- N est un effort de traction.
- La position du point C est donnée par la valeur de l'excentricité e_0 :

$$\boldsymbol{e_{SER} = \frac{M_{gser}}{N_{ser}} = -0.1m\ ;\ d - \frac{h}{2} = 0.55 - 0.30 = 0.25\ m}$$

$$|e_{ser}| \leq d - \frac{h}{2}$$

Le point C est situé entre les deux nappes d'armatures longitudinales, on est donc bien dans le cas d'une section entièrement tendue.

- **Calcul des excentricités.**

Le calcul des excentricités nous donne :

$$e_{A1} = \frac{h}{2} - d' + |e_{ser}| = 0.35m$$
$$e_{A2} = \frac{h}{2} - (h - d) - |e_{ser}| = 0.15m$$

- **Contraintes admissibles à l'ELS**

En fissuration préjudiciable, la contrainte de traction admissible dans les armatures est :

$$\overline{\sigma_s} = min\left\{\frac{2}{3}fe; max\left(0.5fe; 110\sqrt{\eta f_{tj}}\right)\right\} = 250\ MPa$$

$$\overline{\sigma_{bc}} = 0.6 f_{c28} = 15\ MPa$$

- **Calcul des armatures**

Pour la nappe supérieure

$$A_{1ser} = \frac{N_{ser} e_{A2}}{(e_{A1} + e_{A2})\overline{\sigma_s}} = 4.8\ Cm^2$$

Pour la nappe inférieure :

$$A_{2\,ser} = \frac{N_{ser} e_{A1}}{(e_{A1} + e_{A2})\overline{\sigma_s}} = 11.20\ Cm^2$$

En conclusion :

- Pour la nappe supérieure : $A_1 = \max\begin{cases} A_{1u} \\ A_{1ser} \end{cases} = 4.8\ Cm^2$
- Pour la nappe inférieure : $A_2 = \max\begin{cases} A_{2u} \\ A_{2ser} \end{cases} = 11.20\ Cm^2$

- **Pourcentage minimal d'armatures/Condition de non fragilité**

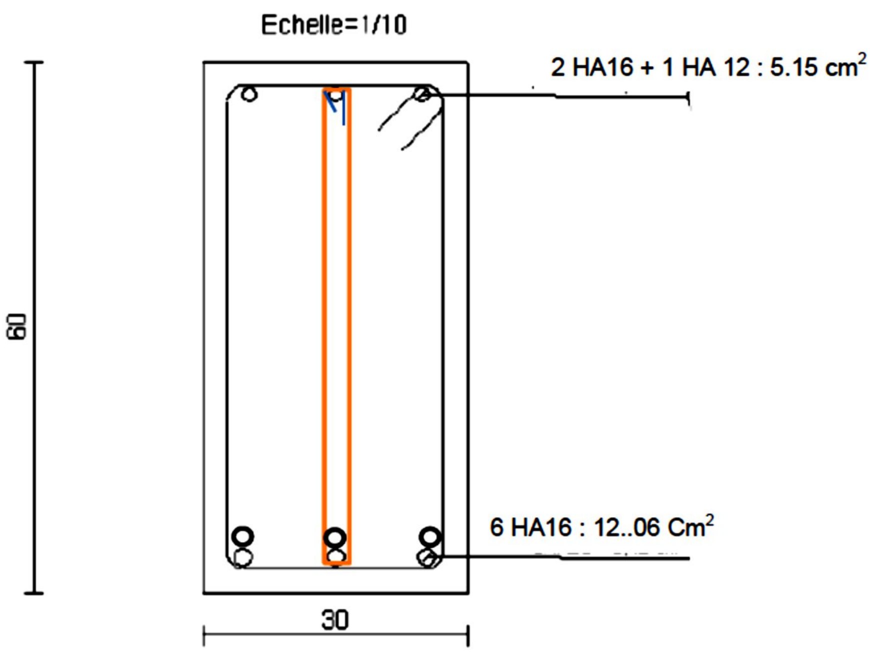
Il est rappelé que le % mini pour une section entièrement tendue est :

$$A\min = \frac{B \times F_{t28}}{F_e}$$

La section Amin est à comparer avec la section totale A1 + A2 car on est dans le cas d'une section entièrement tendue.

On a donc :

$$A_1 + A_2 = 16\ Cm^2 > A_{min} = 7.56\ Cm^2$$



EXERCICE N°2 : SETIONS PARTIEEMENT TENDUES AVEC EFFORT NORMAL DE COMPRESSION

Considérons :

- Poteau Encastré – Articulé.
- Hauteur libre du poteau : 3,00m
- Section du poteau : 20*50 cm

- Charges permanentes : Mg= 60 KN.m et Ng=110 KN
- Surcharges d'exploitations : Mq= 75 KN.m et Ng= 125 KN
- Durée d'application des charges : supérieure à 24h
- **Matériaux :**
  - Béton: F_{c28}= 25Mpa
  - Acier: Fe500

* Enrobage des armatures : 3cm
* Fissuration préjudiciable
* Hauteurs utiles : - d= 0,45m ; d'= 0,05m

Déterminer les armatures en pied de poteau.

SOLUTION

1) Caractéristiques des matériaux :

- Béton:
  - Fc28= 25 Mpa => $Fbu = 0{,}85\dfrac{F_{c28}}{\theta \times \gamma_b} = 0{,}85\dfrac{25}{1{,}5} = 14{,}17Mpa$
  - Ft28= 0,6 + 0,06Fc28= 0.6 + 0.06 x 25= 2.1 Mpa
- **Acier :**

$$\boldsymbol{\sigma_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = 434,78\mathrm{MPa}}$$

2) Calcul des sollicitations

ELU

- Mu=1,35*60 + 1,50*75= 193,5 KN.m= 0,194MN.m
- Nu= 1,35*110 + 1,50*125= 0,336 MN.

ELS

- Mser= 60 + 75= 0,135 MN.m
- Nser= 110 + 125= 0,235 MN

3) Calcul à l'ELU

A l'ELU, les sollicitations sont les suivantes :

- M_u= 0,194MN.m
- N_u= 336 KN.

Il nous faut donc déterminer :

- Excentricité additionnelle e_a.
- Excentricité du 1er ordre à l'ELU.
- Excentricité du second ordre e_2 (par la méthode forfaitaire).

- *Excentricité additionnelle*

$$e_a = \max\left\{ \begin{array}{c} 2cm \\ \dfrac{l}{250} = \dfrac{300}{250} = 1{,}2cm \\ 1cm \end{array} \right\} = 2cm$$

- *Excentricité du 1er ordre*

$$e_1 = \frac{Mu}{Nu} + e_a = \frac{0{,}194}{0{,}336} + 0{,}02 = 0{,}60m \text{ à l'ELU}$$

- *Calcul de l_f/h*

Dans le cas d'un poteau encastré-articulé, la longueur de flambement vaut l_f= 0,7 l
Dans notre cas, on a l_f = 0,70*3=2,10m
On doit vérifier :

$$\frac{l_f}{h} = \frac{2{,}10}{0{,}50} = 4{,}20 \le \max\left[15; \frac{20e_1}{h} = \frac{20\times 0{,}60}{0{,}50} = 24\right] = 24$$

La vérification est OK, on peut donc estimer forfaitairement l'excentricité du second ordre :

$$e_2 = \frac{3\times l_f^2}{10^4 h}[2+\alpha\times\varphi]$$

$$\alpha = \frac{M_G}{M_G+M_Q} = \frac{60}{60+75} = 0{,}444$$

$$\varphi = 2$$

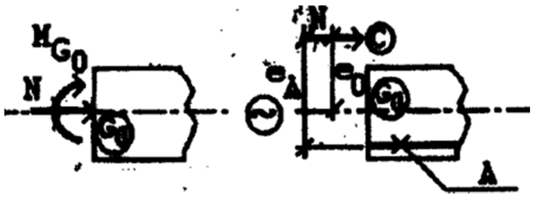
$$e_2 = \frac{3\times 2{,}10^2}{10^4\times 0{,}50}[2+0{,}444\times 2] = 0{,}0076m$$

2.1) Sollicitations corrigées à l'ELU.

Les sollicitations corrigées, à prendre en compte pour le calcul en flexion composée, sont :
N_u= 0,336MN

M_u= (e1 + e2) * Nu= (0,60 + 0,0076) * 0,336 = 0,204 MN.m

Ces valeurs sont calculées par rapport au centre de gravité de la section de béton seule, il est impératif de ramener le moment au centre de gravité des aciers tendus pour pouvoir dimensionner les armatures:



Le moment M_{ua} vaut donc :

- Mua= Nua *eA
- Avec eA= (e1 + e2) + (d-h/2)= (0,60 + 0,0076) + (0,45 – 0,50/2)= 0,81m
- Et Mua= 0,336*0,81=0,272MN.m

3. Détermination des armatures à l'ELU :

3.1. Nature de la section

$e_{Tot} = \frac{M_u}{N_u} + e_a + e_2 = 0.6076\ m = 60.76\ Cm > \left(d - \frac{h}{2}\right) = 45 - 25 = 20Cm$

Donc le centre de pression se trouve à l'extérieur de la section. Donc la section est partiellement comprimée.

Le Calcul des armatures se fait en flexion simple sous un moment :

$M_{As} = N_u\left(d - \frac{h}{2} + e_1 + e_a + e_2\right) = 0.272$ MN.m

3.2. Calcul des armatures

- En flexion simple

- On calcule le moment réduit :

$$\mu = \frac{M_{uA}}{bd^2 f_{bu}} = 0.474 > \mu_{lim} = 0.297 \Rightarrow A'_s \neq 0$$

$$A'_{su} = \frac{(\mu - \mu_l)bd^2 f_{bu}}{(d - d')f_{su}} = \frac{M_{uA} - \mu_l bd^2 \sigma_{bu}}{(d - d')\sigma_{su}} = 5.86\ Cm^2\ ; A_{su} = A'_{su} + \frac{0.8\alpha_l bdf_{bu}}{\sigma_{su}} = 16.46\ Cm^2$$

- **En flexion composée**

En flexion composée, on a donc :

- A'= $A'_{su} = 5.86\ Cm^2$
- A= A_{su} – N/σ_{su} = 16,46.10-4 – 0,336/434,78 = 8,73 cm²

- **Vérification du pourcentage minimum d'armatures (Condition de non fragilité)**

- $A_{\min} = 0,23\dfrac{F_{t28}}{F_e}b_0 d\dfrac{e-0,45d}{e-0,185d}$
- $A_{\min} = 0,23\dfrac{2.1}{500}0.20\times0.45\dfrac{0.574-0.45\times0.45}{0.574-0,185\times0.45} = 0,66cm^2$

4) Justification à l'ELS

- **Détermination des excentricités et sollicitations corrigées ELS.**

A l'ELS, on a :

- Mser= 60 + 75= 0,135 MN.m
- Nser= 110 + 125= 0,235 MN
- e_{0ser}= 0,135/0,235= 0,574m

Il faut également ramener cette excentricité au centre de gravité des aciers tendus:

- $e_{Aser} = e_{0ser} + (d - \dfrac{h}{2}) = 0,574 + (0,45 - \dfrac{0,50}{2}) = 0,774m$

et donc M_{aser}= 0,235 * 0,774= 0,182 MN.m Les sollicitations corrigées (ELS) sont donc :

Nser= 0,235 MN

Mser= 0,182 MN.m

e_{0ser}= 0,135/0,235= 0,574m = 57.4 Cm > h/ 6 = 8.33 Cm ; Il y'a donc de fortes chances que la section soit partiellement comprimée à l'ELS.

- Déterminons la distance entre le centre de pression et l'arrête la plus comprimée

Soit : $c = \frac{h}{2} - e_{ser} = 25 - 54.5 = -29.5\ Cm$; $e_{Aser} = 77.4\ Cm > d = 45\ Cm$

Soient :

$$P = -3.C^2 - \left[\frac{90.A'_S}{b}.(C-d')\right] + \left[\frac{90.A_S}{b}.(d-C)\right] = -532.4\ \text{cm}^2$$

$$q = -2.C^3 - \left[\frac{90.A'_S}{b}.(C-d')^2\right] - \left[\frac{90.A_S}{b}.(d-C)^2\right] = -\ 415746.41125\ \text{cm}^3$$

N.B :

Les armatures A_s et A'_s sont celles calculées en flexion composée à l'ELU. La solution de l'équation : $y_c^3 + py_c + q = 0$ conduit à la position de l'axe neutre

- Pour déterminer la solution de cette équation, soit :

$$\Delta = q^2 + \left(\frac{4p^3}{27}\right) = 172845078467.2541 - 22356837.36651852$$
$$= 172822721629.8876 > 0$$

- La solution de l'équation précédente est :

$y_c = z - \left({}^{p}/_{3z}\right)$; $z = \sqrt[3]{t}$

Avec : $t = 0.5\left(\sqrt{\Delta} - q\right) = 415732.9670206869$
$z = \sqrt[3]{t} = 74.63$;
$y_c = z - \left({}^{p}/_{3z}\right) = 72.25\ cm$;
La nouvelle position de l'axe neutre est :

$$y_{ser} = y_c + c\ (C\ avec\ son\ signe) = 42.75\ cm$$

- Pour vérifier l'ELS de fissuration et d'ouverture des fissures, on procède comme suit :

- On calcule les contraintes :

$\sigma_{bc} = ky_{ser};\ \sigma_s = 15k(d - y_{ser})$; Avec $k = \frac{N_{ser}y_c}{I}$

- Et on vérifie : $\sigma_{bc} \leq \overline{\sigma_{bc}};\ \sigma_s \leq \overline{\sigma_s}$

Pour ce :

- On calcule le moment d'inertie de la section :

$$I = \frac{by_{ser}^3}{3} + 15[A_s(d - y_{ser})^2 + A_s'(y_{ser} - d')^2] = 203840.384375\ cm^4$$

D'où :

$$k = \frac{N_{ser}y_c}{I} = 0.083\ N.mm^{-3}$$

$$\sigma_{bc} = ky_{ser} = 35.6\ Mpa;\ \sigma_s = 15k(d - y_{ser}) = 28\ MPa$$

- Contraintes admissibles à l'ELS

  En fissuration préjudiciable, la contrainte de traction admissible dans les armatures est :

$$\overline{\sigma_s} = min\left\{\frac{2}{3}fe; max\left(0.5fe; 110\ \sqrt{\eta f_{tj}}\right)\right\} = 250\ MPa$$

$\overline{\sigma_{bc}} = 0.6f_{c28} = 15\ MPa\ < \sigma_{bc}$; On calcule de nouvelles armatures :

- **Calcul de nouvelles armatures :**
- En flexion simple :

$$\alpha = \frac{9f_{c28}}{9\ f_{c28} + \overline{\sigma_s}} = 0.89$$

$$\sigma_s' = 9f_{c28}\left(1 - \frac{d'}{\alpha d}\right) = 197\ MPa$$

$$A_{sf}' = \frac{M_{Aser} - 0.1\alpha(3 - \alpha)bd^2f_{c28}}{\sigma_s'(d - d')} = 10.38\ Cm^2$$

$$A_{1s} = \frac{A_s'\sigma_s' + 0.3\alpha\ bdf_{c28}}{\overline{\sigma_s}} = 32.20\ Cm^2$$

- En flexion composée :

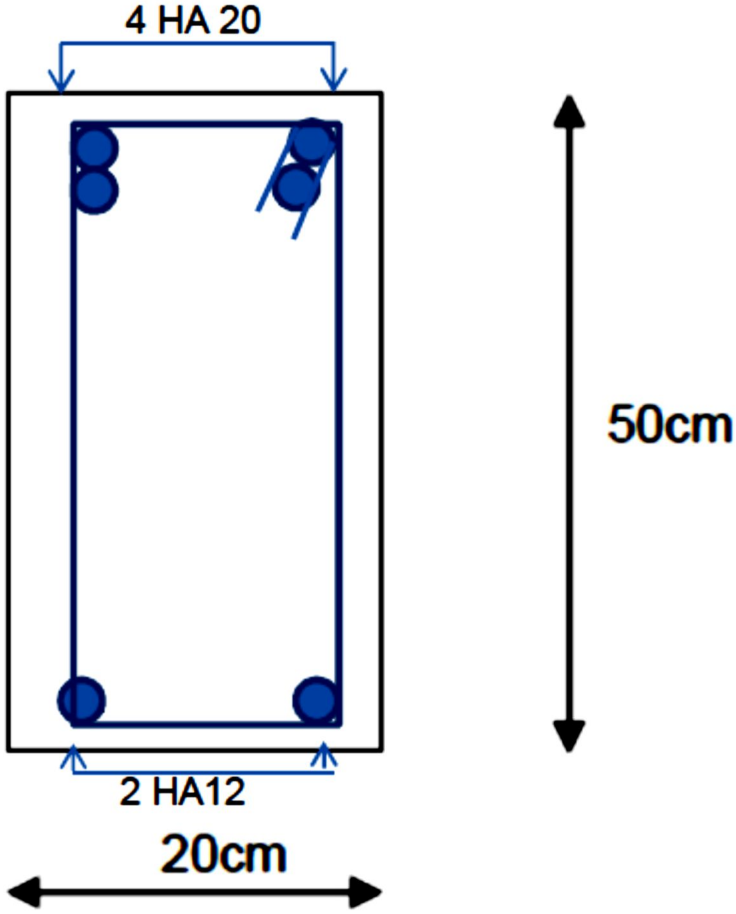
$$A_s' = A_{sf}' = 10.38\ Cm^2$$

$$A_s = A_{1s} - \frac{N_{ser}}{\sigma_s} = 3220 - \frac{235000}{28} < 0$$

- Armatures minimales

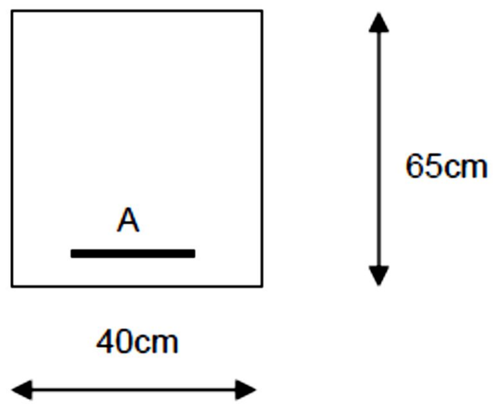
- $$A_{\min} = 0{,}23\frac{F_{t28}}{F_e}b_0 d\,\frac{e-0{,}45d}{e-0{,}185d}$$
- $$A_{\min} = 0{,}23\frac{2.1}{500}0.20\times0.45\frac{0.574-0.45\times0.45}{0.574-0{,}185\times0.45} = 0{,}66cm^2$$

Pour le ferraillage de la section, on propose :
4 HA20 en zone comprimée (soit 12.57 Cm^2) et 2 HA12 en zone tendue (soit 2.26 cm^2).



EXERCICE N°3 : SETIONS PARTIEEMENT TENDUES AVEC EFFORT NORMAL DE TRACTION

Considérons la section de poutre suivante:



On donne :

Sollicitations :

- Charges permanentes : Mg= 90 KN.m et Ng=-190 KN
- Surcharges d'exploitations : Mq=70 KN.m et Ng= -145 KN
- Durée d'application des charges : supérieure à 24h

Matériaux :

- Béton: Fc28= 25Mpa
- Acier: Fe500
- Enrobage des armatures : 3cm
- Fissuration préjudiciable

Hauteurs utiles :

- d= 0,60m
- d'= 0,05m

On souhaite dimensionner les armatures tendues de la poutre, à l'ELU.

SOLUTION

1) Caractéristiques des matériaux

- Béton:

Fc28= 25 Mpa => $Fbu = 0{,}85\dfrac{F_{c28}}{\theta \times \gamma_b} = 0{,}85\dfrac{25}{1{,}5} = 14{,}17 Mpa$

Ft28= 0,6 + 0,06Fc28= 0.6 + 0.06 x 25= 2.1 Mpa

- Acier

Fe 500 $MPa\ ;\ \sigma_{su} = \frac{fe}{\gamma_s} = 434.78\ MPa$

2) Calcul des sollicitations

ELU

- M_u=1,35*90 + 1,50*70= 226.5 KN.m = 0,227 MN.m
- N_u= 1, 35*(-190) + 1, 50*(-145) = -474 KN = - 0,474 MN.

ELS

- M_{ser} = 90 + 70= 160 KN.m = 0,160 MN.m

- N_{ser} = -190 - 145= -335 KN= - 0,335 MN

3) Détermination des excentricités et sollicitations corrigées ELU.

A l'ELU, les sollicitations sont les suivantes :

- Mu= 0,227 MN.m
- Nu= -0.474 MN

On est dans le cas du dimensionnement d'une poutre, par conséquent, on ne prendra pas en compte les excentricités e_a, et e_2.

On a donc:

$$e_0 = \frac{Mu}{Nu} = \frac{0{,}227}{-0.474} = -0{,}479m$$

4) Sollicitations corrigées.

Les valeurs précédemment déterminées sont calculées par rapport au centre de gravité de la section de béton seule, il est impératif de ramener le moment au centre de gravité des aciers tendus pour pouvoir dimensionner les armatures. Le moment M_{ua} vaut donc :

$$M_{uA} = N_u \times e_A = N_u \times (|e_0| - (d - \frac{h}{2}))$$

Mua= 0.474 x (0.479 – 0.60 + 0.65/2)= 0,097 MN.m

Les sollicitations corrigées (ELU) sont donc:

N_{uA}= - 0,474 MN

M_{uA}= 0, 097MN.m

5) Détermination des armatures à l'ELU :

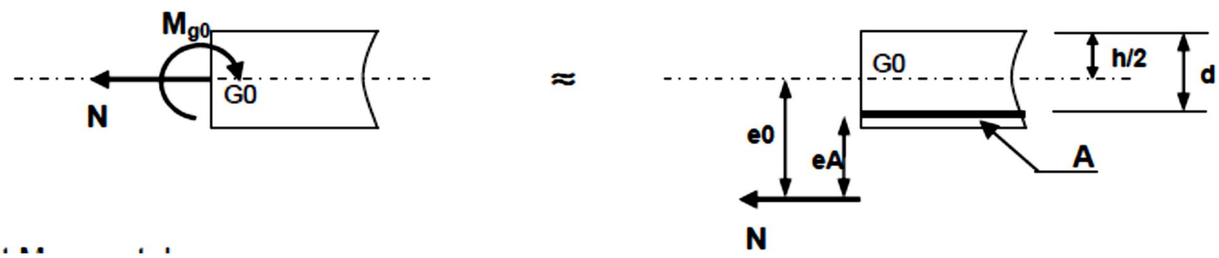
5.1. Nature de la section

$$|e_{0u}| = \frac{M_u}{N_u} = 0.47\ m = 47\ Cm > \left(d - \frac{h}{2}\right) = 60 - 32.5 = 27.5Cm$$

Donc le centre de pression se trouve à l'extérieur de la section. Donc la section est partiellement comprimée.

Le Calcul des armatures se fait en flexion simple sous un moment :

$M_{As} = N_u \left(|e_o| - (d - \frac{h}{2}\right) = 0.097$ MN.m



5.2. Calcul des armatures

- En flexion simple

- On calcule le moment réduit :

$$\mu = \frac{M_{uA}}{bd^2 f_{bu}} = 0.0475 < \mu_{lim} = 0.297 \Rightarrow A'_s = 0$$

Lorsque μ est faible, en particulier pour μ<0.1, la section d'armatures tendues peut être évaluée rapidement par : $As = 1.07\frac{M_{uA}}{d}.\sigma_{su} = 3.97\ Cm^2$

- **En flexion composée**

En flexion composée, on a donc :

- $A'_s = A'_{su} = 0\ Cm^2$
- $A_s = A_{su} + N/\sigma_{su} = 3.97 + 10.90 = 14.87\ cm^2$

- **Vérification du pourcentage minimum d'armatures (Condition de non fragilité)**

$$A_{min} = 0.23\frac{F_{t28}}{F_e}b_0 d\frac{e-0.45d}{e-0.185d}$$

$$A_{min} = 0.23\frac{2.1}{500}0.40\times0.60\frac{-0.478-0.45\times0.60}{-0.478-0.185\times0.60} = 2.94cm^2$$

5) Justification à l'ELS

5.1. Détermination des excentricités et sollicitations corrigées ELS.

A l'ELS, on a:

- **M_{ser} = 0,160 MN.m**
- **N_{ser} = -0,335 MN**
- **e_{0ser} = 0,160/- 0,335= 0,478 m**

La résultante des forces extérieures ne tombe pas entre les armatures. Comme il s'agit d'une force de traction, la section est donc partiellement comprimée.

Il faut également ramener cette excentricité au centre de gravité des aciers tendus:

$$e_A = |e_0| - \left(d - \frac{h}{2}\right) = 20.3\ cm$$

$$M_{serA} = N_{ser}\times e_A = N_{ser}\times(|e_{0ser}| - (d - \frac{h}{2}))$$

M_{serA} = 0,068 MN.m

- **Les sollicitations corrigées** (ELS) sont donc :

N_{ser} = - 0,335 MN
M_{ser} = 0,068 MN.m

Pour vérifier l'ELS de fissuration et d'ouverture des fissures, on procède comme suit :

On calcule les contraintes :

$\sigma_{bc} = ky_{ser};\ \sigma_s = 15k(d - y_{ser})$; Avec $k = \frac{N_{ser}y_c}{I}$

Et on vérifie : $\sigma_{bc} \leq \overline{\sigma_{bc}};\ \sigma_s \leq \overline{\sigma_s}$

- **Cherchons la position de l'axe neutre y_{ser} :**

La solution de l'équation : $y_c^3 + py_c + q = 0$ conduit à la position de l'axe neutre

$$P = -3.C^2 - \left[\frac{90.A'_S}{b}.(C - d')\right] + \left[\frac{90.A_S}{b}.(d - C)\right]$$

$$q = -2.C^3 - \left[\frac{90.A'_S}{b}.(C - d')^2\right] - \left[\frac{90.A_S}{b}.(d - C)^2\right]$$

C : Distance entre le centre de traction et la fibre la plus comprimée.

$c = d - (-e_A) = 80.3\ cm$ (e_A a le signe de N_{ser}) ; ici Nser est un effort de traction (<0)

Nser < 0 (Effort de traction) ; e_A a le signe de $_{Nser}$ ($e_A < 0$)

e_A : Distance entre le centre de traction et le centre de gravité des armatures tendues.

C, est positif conformément aux conventions de signes

N.B :

Les armatures A_s et A'_s sont celles calculées en flexion composée à l'ELU.

- $A'_s = 0\ Cm^2$
- $A_s = 14.87\ cm^2$

Donc:

$$P = -3.C^2 + \left[\frac{90.A_S}{b}.(d - C)\right] = -20023.45$$

$$q = -2.C^3 - \left[\frac{90.A_S}{b}.(d - C)^2\right] = -1049350.75$$

- La solution de l'équation : $y_c^3 + py_c + q = 0$ conduit à la position de l'axe neutre

Soit :

$$\Delta = q^2 + \left(\frac{4p^3}{27}\right) = 1101136996525.563 - 1189358964006.698$$
$$= -88221967481.135 < 0$$

La position de l'axe neutre est $y_{ser} = y_c + c$ (c avec son signe) ; y_c est celle qui vérifie : $0 \leq y_{ser} \leq d$, parmi les trois solutions suivante :

$$y_1 = a\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right);\ y_2 = a\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120°\right);\ y_3 = a\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240°\right),$$ avec :

$$a = 2\sqrt{-p/3} = 163.4$$

$$\cos\varphi = \frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}} = 0.96$$

$y_1 = a\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) = 161.76\ cm;\ y_2 = a\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120°\right) = -93{,}58\ cm$; $y_3 = a\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240°\right) = -66.99\ cm$, avec :

D'où : $y_{ser1} = 242.06\ cm;\ y_{ser2} = -12{,}83\ cm;\ y_{ser3} = 13.31\ cm$

La nouvelle position de l'axe neutre est :

$y_{ser} = y_c + c\ (C\ avec\ son\ signe) = 13.31\ cm$; qui vérifie : $0 \leq y_{ser} \leq d$, parmi les trois solutions .

- **On calcule les contraintes :**

$\sigma_{bc} = ky_{ser};\ \sigma_s = 15k(d - y_{ser})$; Avec $k = \frac{N_{ser}y_c}{I}$

Et on vérifie : $\sigma_{bc} \leq \overline{\sigma_{bc}};\ \sigma_s \leq \overline{\sigma_s}$

- **Pour ce, on calcule le moment d'inertie de la section :**

$$I = \frac{by_{ser}^3}{3} + 15[A_s(d - y_{ser})^2 + A_s'(y_{ser} - d')^2] = 517678.5025466667\ cm^4$$

D'où :

$$k = \frac{N_{ser}y_c}{I} = 0.0060\ N.mm^{-3}$$

$$\sigma_{bc} = ky_{ser} = 0.7986\ Mpa;\ \sigma_s = 15k(d - y_{ser}) = 4.20\ MPa$$

- **Contraintes admissibles à l'ELS**

  En fissuration préjudiciable, la contrainte de traction admissible dans les armatures est :

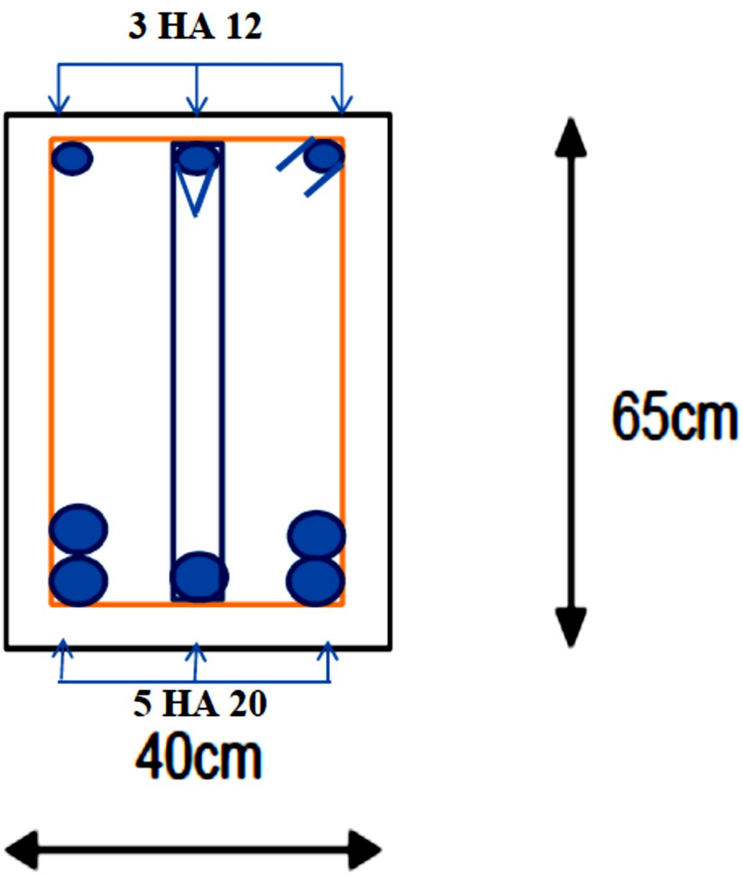
$$\overline{\sigma_s} = min\left\{\frac{2}{3}fe; max\left(0.5fe; 110\ \sqrt{\eta f_{tj}}\right)\right\} = 250\ MPa$$

  $\overline{\sigma_{bc}} = 0.6f_{c28} = 15\ MPa > \sigma_{bc}$;

  $\overline{\sigma_s} > \sigma_s$;

  On garde les armatures calculées à l'ELU.

- A'$_s$ = *0 Cm^2 (Soit 3 HA12: Armatures de montage)*
- A$_s$ = 14.87 cm² (Soit 5 HA20: 15, 71 cm^2)



EXERCICE N°4 : SECTION ENTIEREMENT COMPRIMEE (EFFORT NORMAL DE COMPRESSION°

Soit un poteau de section rectangulaire (30 cm x 50 cm) réalisée en béton de résistance f_{c28} = 25 MPa armée par des aciers HA 500, en fissuration préjudiciable, l'enrobage des armatures longitudinales étant de 4 cm.
La longueur libre et la longueur de flambement du poteau valent 4.8m.
Sollicitations :

- Effort normal de compression : N_G = 0.805 MN (permanent) ; N_Q = 0.995 MN (effort d'exploitation)
- Moment de flexion : M_G = 0.018 MN.m (Permanent); M_Q = 0.022 MNm (Moment d'exploitation)

SOLUTION

1) Caractères des matériaux
Béton : $f_{t28} = 2.1\ MPa;\ f_{bu} = \sigma_{bu} = 14.2\ MPa;\ \overline{\sigma_{bc}} = 15\ MPa$
Acier : $\sigma_{su} = 435\ MPa;\ \overline{\sigma_s} = 250\ MPa$

2) Combinaisons d'actions
A L'ELU : N_u = 2.58 MN ; M_u = 0.0573 MNm
A L'ELS : N_{ser} = 1.80 MN ; M_{ser} = 0.040 MNm

3) Calcul à l'ELU

3.1) Excentricités : $e_1 = \frac{M_u}{N_u} = 0.0222\ m$ = 2.22 cm

Il nous faut donc déterminer :

- Excentricité additionnelle e_a.
- Excentricité du 1er ordre à l'ELU.
- Excentricité du second ordre e_2 (par la méthode forfaitaire).

- *Excentricité additionnelle*

$$e_a = max\begin{cases} 2\ cm \\ \frac{L}{250} = 1.92\ cm \end{cases} = 2\ Cm$$

- *Excentricité du 1er ordre*

$$\boldsymbol{e_1 + e_a = 4.22\ Cm}$$

- *Calcul de l_f/h*

Dans le cas d'un poteau encastré-articulé, la longueur de flambement vaut l_f= 0,7 l

Dans notre cas, on a l_f = l = 4.8 m

On doit vérifier :

$$\frac{l_f}{h} = \frac{4.8}{0.5} = 9.6\ m \leq max\left\{15;\ \frac{20(e_1+e_a)}{h} = 1.688\right\} = 15$$

La vérification est OK, on peut donc estimer forfaitairement l'excentricité du second ordre :

$$e_2 = \frac{3\ L_f^2}{10000\ h}(2+\alpha\Phi);\ h = 0.5m;\ \phi = 2;\ \alpha = \frac{M_G}{M_G+M_Q};\ D'ou\!:\ e_2 = 0.04009\ m$$

Les sollicitations de calcul sont :

$$N_u = 2.58\ MN\ (inchangé);\ M_u = e_{Tot}\ N_u$$
$$e_{Tot} = e_1 + e_a + e_2 = 0.08229\ m;\ D'ou\ M_u = 0.212\ MNm$$

3.2. Nature de la section

$$|e_{Tot}| = 8.23\ cm \leq \left(d - \frac{h}{2}\right) = 21\ Cm$$

Le centre de pression se trouve entre les armatures, il faut vérifier :

$$N_u(d-d') - M_{As} \leq \left[0.337 - 0.81\frac{d'}{h}\right] bh^2 f_{bu}$$

Avec : $M_{As} = N_u e_A$; $e_A = d - \frac{h}{2} + e_{Tot} = 29.23\ Cm; D'ou\!: M_{As} = 0.7482\ MNm$

$N_u(d-d') - M_{As} = 1.0836 - 0.7482$=0.3354 MNm

$$\left[0.337 - 0.81\frac{d'}{h}\right] bh^2 f_{bu} = 0.2722 * 1065 = 0.29MNm$$

On constate que :

$$N_u(d - d') - M_{As} > \left[0.337 - 0.81\frac{d'}{h}\right] bh^2 f_{bu}$$

$$\textit{La section est entièrement comprimée}$$

3.3. Armatures

Vérifions si les armatures inférieures sont nécessaires. Pour cela vérifions la condition :

$$N_u(d - d') - M_{As} < (0.5h - d')f_{bu}bh$$

$$N_u(d - d') - M_{As} = 0.3354\ MNm < (0.5h - d')f_{bu}bh = 0.4473\ MNm$$

Donc:

$$A_s = 0\ ;\ A'_s = \frac{N_u - \psi_1 f_{bu} bh}{\sigma'_{su}}$$

Avec:

$$\psi_1 = \frac{0.3571 + [N_u(d-d') - M_{As}]/f_{bu}bh^2}{0.8571 - (d'/h)}\ ;$$

En définitive :

$$A_s = 0\ ;\ A'_s = 17.89\ Cm^2$$

4) Calcul a l'ELS

4.1. Combinaisons d'actions

N_{ser} = 1.80 MN ; M_{ser} = 0.040 MNm

4.2. Excentricités : $e_{ser} = \frac{M_{ser}}{N_{ser}} = 0.0222\ m$ = 2.22 cm

4.3. Nature de la section :

$$\frac{h}{6} = 8.33\ cm$$

$$e_{ser} < \frac{h}{6} : \textit{Il est fort plausible que la section soit entièrement comprimée}$$

4.4. Armatures

- Calcul de la section totale rendue homogène

$$S = bh + 15(A'_s + A_s) = 1768.35\ cm^2$$

- Moment d'inertie de la section homogène :

$$I = \frac{[b(V_1^3 + V_2^3)]}{3} + 15[A'_s\,(V_2 - d')^2 + A_s(d - V_2)^2]$$

- Position de l'axe neutre : $V_2 = \left({}^1/_S\right)\left[\frac{bh^2}{2} + 15(A'_s d' + A_s d)\right] = 21.81\ cm$;

$V_1 = h - V_2 = 38.18\ cm$

D'où :

$$I = \frac{[b(V_1^3 + V_2^3)]}{3} + 15[A'_s(V_2 - d')^2] = 745419.125\ Cm^4$$

- Calcul des contraintes :

$$\sigma_{bcmin} = \frac{N_{ser}}{S} - \frac{M_{ser}V_1}{I} = 8.12\ MPa\ ; \sigma_{bcmax} = \frac{N_{ser}}{S} + \frac{M_{ser}V_2}{I} = 10.29\ MPa$$

En Conclusion :

$\sigma_{bcmin} > 0; La\ section\ est\ effectivement\ entièrement\ comprimée\ à\ l'ELS$

$\sigma_{bcmax} = 10.29\ MPa < \overline{\sigma_{bc}} = 15\ MPa : On\ garde\ les\ armatures\ calculées\ à\ l'ELU$

Soit :

$$A_s = 0\ ;\ A'_s = 17.89\ Cm^2$$

Pour le ferraillage, on prend :

- Pour les armatures supérieures, $A'_s = 18.85\ Cm^2\ Soit\ 6\ HA20$
- Pour les armatures inférieures, des armatures de montage : 3 HA12, soit : $A_s = 3.39\ Cm^2$