PARTIE 2 : CALCUL DES SECTIONS RECTANGULAIRES A L'ELU (SECTIONS AVEC ARMATURES TENDUES ET COMPRIMEES

2.1.2. Sections rectangulaires comportant des armatures tendues et des armatures comprimées (fig.5)

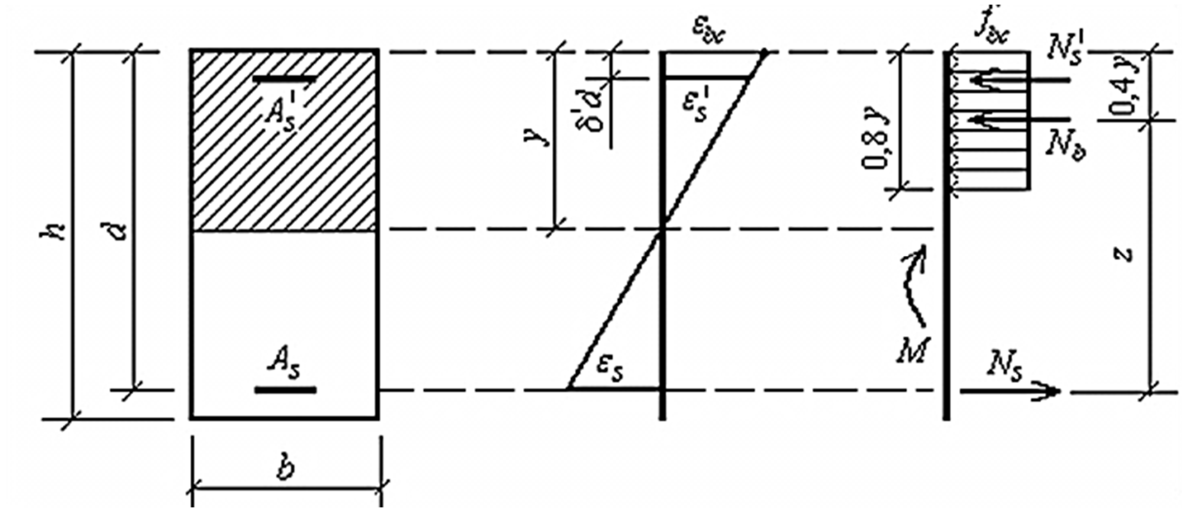

Fig.5. Section rectangulaire avec armatures comprimées

La section rectangulaire, dont le béton de la zone comprimée n'est pas capable de reprendre seul tous les efforts de compression, doit être renforcée dans cette zone par des armatures.

Le mode de ferraillage de la section (uniquement par des armatures tendues ou par des armatures tendues et comprimées), dépend du rapport entre μ et μ_l. Si $\mu \leq \mu_l$, la section peut être armée uniquement par des armatures tendues; si $\mu > \mu_l$, la section doit être armée par des armatures tendues et comprimées (le ferraillage d'une telle section sans armature comprimée n'est pas économiques).

Les règles *B.A.E.L* précisent que seules peuvent être prises en compte dans les calculs les armatures longitudinales de compression qui sont maintenues tous les 15 diamètres, au plus, par des armatures transversales. Par conséquent, s'il existe des armatures de compression en dehors des angles de la section, les armatures transversales ne pourront pas être constituées uniquement par un cadre, il sera nécessaire de prévoir des étriers ou des épingles, pour empêcher tout déplacement et tout risque de flambage des armatures comprimées situées dans la partie centrale.

Si la condition précédente n'était pas remplie, les armatures comprimées seraient à considérer comme de simples barres de montage et ne pourraient intervenir dans les calculs. En outre, les règles *B.A.E.L* indiquent que la partie du moment de flexion équilibré par les armatures comprimées doit être inférieure à 40 % du moment total.

Pour calculer les armatures des sections doublement armées, on peut utiliser la méthode exposée ci-dessous :

Soit, on considère une section rectangulaire doublement armée et soumise à un moment M_f.

Les diagrammes des contraintes et des déformations dans le béton de cette section sont représentés sur la figure 5, qui indique également la position de la résultante des compressions N_b dans le béton, ainsi que celles des efforts N_s' dans les armatures comprimées et N_s dans les armatures tendues.

Les efforts repris par la section sont:

- *L'effort de compression repris par le béton comprimé:* $N_b = 0{,}8 f_{bc}\, by$
- *L'effort de compression repris par les armatures comprimées:* $N_s' = A_s'\, \sigma_s'$;
- *L'effort de traction dans les armatures tendues :* $N_s = A_s\, \sigma_s$.

La somme des efforts sur l'axe longitudinal donne:

$-\Sigma N = 0 \longrightarrow A_s\, \sigma_s - As'\, \sigma_s' - 0,8 f_{bc}\, b\, y = 0,$

ou encore : $A_s\, \sigma_s - A_s'\, \sigma_s' - 0{,}8 f_{bc}\, b\, \alpha\, d = 0$ (7)

La somme des moments par rapport au point de passage de N_s' :

$-\Sigma M = 0 \longrightarrow M_u - As\, \sigma_s\, (d - d') + 0,8 f_{bc}\, b\, y\, (0,4 y - d') = 0$ (8)

La somme des moments par apport au point de passage de N_S

$-\Sigma M = 0; \longrightarrow M_u - A_S'\, \sigma_S'\, (d - d') - 0,8 f_{bc}\, b\, y\, (d - 0,4 y) = 0,$

ou encore $M_u - A_S'\, \sigma_S'\, (d - d') - \mu_l f_{bc}\, b\, d^2 = 0$ (9)

D'après ces équations on trouve:

$$\boldsymbol{A_s = \frac{M_u + 0.8 f_{bc} b y (0.4y - d')}{(d - d')\sigma_s}} \quad \textbf{(10)}$$

Ou encore :

$$\boldsymbol{A_s = \frac{A_s'\sigma_s' + 0.8 f_{bc}\, b\alpha d}{\sigma_s}} \quad (11)$$

Après avoir déterminé la section des armatures tendues As en utilisant l'équation (10), il sera plus aisé de calculer la section des armatures comprimées A'$_s$, à partir de l'équation (11) :

D'où :

$$\boldsymbol{A_s' = \frac{M_u - \mu f_{bc} b d^2}{\sigma'_s (d - d')} = \frac{A_s\sigma_s - 0.8 f_{bc} b y}{\sigma_s'} = \frac{A_s\sigma_s - 0.8 f_{bc} b\alpha d}{\sigma_s'}} \quad \textbf{(12)}$$

<u>Remarques :</u>

1) La solution la plus couramment retenue et qui conduit à une section totale d'armatures (A'$_s$+A$_s$) très proche du minimum consiste à prendre $\alpha_u = \alpha_{lim}$ et $\mu = \mu_{lim}$.

Dans ce cas : $\sigma_s = \sigma_s' = \sigma_{su}$ et on obtient pour les deux types d'aciers courants :

HAfeE400: $\boldsymbol{A_s' = \frac{M_u - 0.391 b d^2 f_{bc}}{348(d - d')}}$; $\boldsymbol{A_s = A_s' + \frac{b d f_{bc}}{651}}$ **(13)**

HAfeE500: $\boldsymbol{A'_s = \frac{M_u - 0.371bd^2 f_{bc}}{435(d-d')}}$; $\boldsymbol{A_s = A'_s + \frac{bdf_{bc}}{881}}$ **(14)**

2) Les règles BAEL 91 modifiées 99 imposent que :
- Pour empêcher le flambement des armatures comprimées, celles-ci doivent être entourées de cadres tous les 15 diamètres.
- La part du moment de flexion équilibrée par les aciers comprimés doit être inférieure à 40% du moment total. Soit :

$$\sigma'_s A'_s (d - d') < 0.4 M_u$$

Il est aisé de constater que **cette condition est vérifiée pour un moment réduit μ < 0.667**.

En effet, $A'_s \sigma'_s (d - d') = M'_s = M_u - 0.4bd^2 f_{bc} < 0.4 M_u$,
Ou encore : $0.6 M_u < 0.4 bd^2 f_{bc}$
En remplaçant M_u par son expression, on obtient :

$$0.6 \mu bd^2 f_{bc} < 0.4 bd^2 f_{bc} \quad \text{D'où : } \mu < 0.667.$$

Pour μ > 0.667, on prend :

$$\mu_{calc} = 0.6 \mu_{réel} \text{ et } \alpha_{calc} = 1.25\left(1 - \sqrt{1 - 2\mu_{calc}}\right)$$

Les déformations dans les armatures tendues (ε_s) et dans les armatures comprimées (ε'_s) sont respectivement :

$\varepsilon_s = 3.5‰ \frac{1-\alpha_u}{\alpha_u}$; $\varepsilon'_s = 3.5‰ \left(1 - \frac{d'}{\alpha_u d}\right)$: Valeurs pour lesquelles on déduit les contraintes $\boldsymbol{\sigma_s}$ et $\boldsymbol{\sigma'_s}$

Les sections d'armatures sont :

$$\boldsymbol{A'_s = \frac{M_u - \mu_{calc} bd^2 f_{bc}}{\sigma'_s (d - d')}} \text{ et } \boldsymbol{A_s = \frac{A'_s \sigma'_s + 0.8 \alpha_{calc} bdf_{bc}}{\sigma_s}} \qquad \textbf{(15)}$$

Les calculs conduisent à des sections d'armatures qu'il est difficile de placer dans la section du béton. Il est donc conseillé d'augmenter la section du béton pour que le moment réduit devienne inférieur à 0.667. Dans ce cas on veillera à tenir compte du nouveau poids propre de la pièce dans le calcul des sollicitations.

2.1.3. Redimensionnement de la section du béton

Le moment réduit doit être choisi pour :

- Une bonne utilisation du béton c'est-à-dire $\varepsilon_{bc} \geq 2‰$ ou encore : $\mu \geq 0.104$
- Ne pas introduire d'armatures comprimées ($\mu \leq \mu_l$)

Ces conditions s'expriment comme suit :

$$0.104 \leq \frac{M_u}{bd^2 f_{bc}} \leq \mu_l$$

Avec en première approximation, $d = 2.25b$, la relation devient pour les HA400 ou 500 :

$$\boldsymbol{\sqrt[3]{\frac{M_u}{f_{c28}}} \leq b \leq 1.5 \sqrt[3]{\frac{M_u}{f_{c28}}}} \text{ ; puis } \boldsymbol{h = 2.5b} \qquad \textbf{(16)}$$

2.1.4. Raccourcissement des armatures comprimées

On distingue deux cas selon que le diagramme des déformations passe par le point *A* ou par le point *B*.

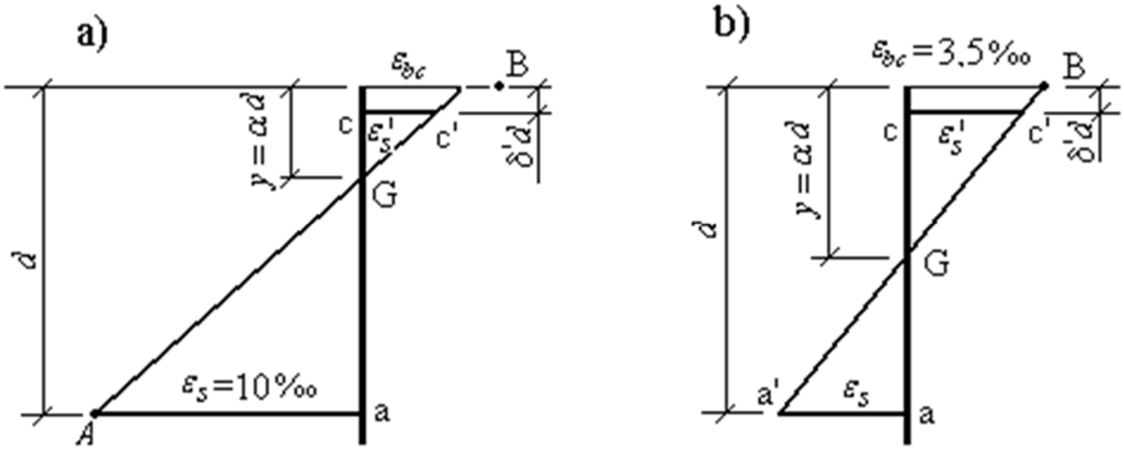

Fig.6. Diagrammes des déformations d'une section fléchielorsque :
a) l'ELU est atteint au pivot A
b) l'ELU est atteint au pivot B

a) Le diagramme des déformations passe par le point A

L'allongement des armatures tendues a alors pour valeur 10 ‰. La considération des triangles semblables *GaA* et *Gcc*' donne le raccourcissement des armatures comprimées. De la même manière on peut déterminer le raccourcissement du béton de la zone la plus comprimée :

$$\frac{cc'}{aA} = \frac{Gc}{Ga}, \text{ soit } \frac{1000\varepsilon_s'}{10} = \frac{\alpha d - \delta' d}{d - \alpha d} = \frac{\alpha - \delta'}{1-\alpha},$$

$$1000\varepsilon_s' = 10\left(\frac{\alpha-\delta'}{1-\alpha}\right) \quad (17)$$

Le raccourcissement 1000 ε_s' étant connu, la contrainte σ_s' dans l'armature comprimée a pour valeur (quel que soit le type d'acier utilisé):

Si 1000 ε_s' < 1000 ε_l, σ_s' = 200 (1000 ε_s');

Si 1000 ε_s' > 1000 ε_l, $\sigma_s' = f_e / \gamma_s$;

b) Le diagramme des déformations passe par le pivot B (fig.3.10,*b*).
Le raccourcissement du béton sur la fibre extrême a pour valeur 3,5 ‰.
Les triangles semblables *Gaa*' et *Gcc*' donnent:

$$\frac{cc'}{aa'} = \frac{Gc}{Ga},$$

Soit :

$$\frac{\varepsilon_s'}{\varepsilon_s} = \frac{\alpha d - \delta' d}{d - \alpha d} = \frac{\alpha - \delta'}{1 - \alpha} \qquad (18)$$

et les triangles Gaa' et GbB :

$$\frac{aa'}{bB} = \frac{Ga}{Gb},$$

Soit :

$$\frac{1000\varepsilon_s}{3.5} = \frac{d - \alpha d}{\alpha d} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \qquad (19)$$

D'où, en multipliant membre à membre les deux égalités précédentes on trouve :

$$1000\ \varepsilon_s' = 3{,}5(\alpha - \delta')/\alpha \qquad (20)$$

Le raccourcissement 1000 ε_s étant connu, la contrainte σ_s' dans l'armature comprimée à pour valeur: $\sigma_s' = f_e/\gamma_s$. Puisque le diagramme des déformations passe par le pivot *B*, l'allongement étant toujours, en pratique, supérieur à l'allongement limite correspondant à la partie horizontale du diagramme.

2.1.5. Calcul des sections avec des armatures symétriques

On peut être amené à prévoir des armatures symétriques lorsque le moment M_u peut changer de sens, tout en gardant la même valeur absolue. Dans ce cas les armatures comprimées auront une valeur importante mais, étant donné que les règles CBA 93 (*B.A.E.L)* imposent que la part du moment fléchissant équilibré par ces armatures soit inférieure à 40 % du moment total, on aura à la limite:

$$M_1 \ {}^{f}= 0{,}60\ M_u, \qquad M_2 = 0{,}40\ M_u.$$

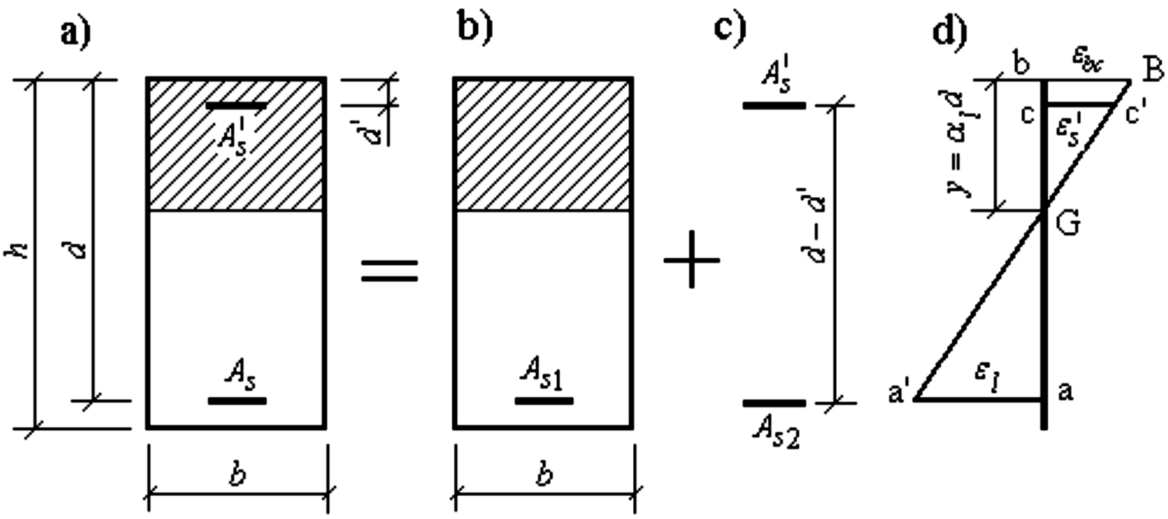

Fig.7. a) Section avec armatures tendues A_s et comprimées A'_s b) Section avec armatures fictives tendues A_{s1} c) Section avec armatures symétriques A_{s2} et A'_S

$$\boldsymbol{A_s = A_{s1} + A_{s2}} \qquad \textbf{(21)}$$

La section fictive A_{s1} équilibre le moment fictif $M_1{}^f$ tel que :

$M_1^f = \mu\sigma_b bd^2 = 0.6M_u = A_{s1}\sigma_s(1 - 0.4\alpha)d$

La part du moment équilibrée par les armatures comprimées étant inférieure à 40% du moment total, nous aurons à la limite :

$$M_2^f = 0.4M_u = A_s'\sigma_s'(d - d') = A_{s2}\sigma_s(d - d') \quad (22)$$

D'où :

$$A_{s2} = \frac{A_s'\sigma_s'}{\sigma_s} \quad (23)$$

$$A_s' = \frac{0.4M_u}{(d-d')\sigma_s'} \quad (24)$$

Sachant que :

$$\boldsymbol{A_{s1} = \frac{M_1^f}{(1-0.4\alpha)d\sigma_s} = \frac{0.6M_u}{\beta d\sigma_s}} \quad \textbf{(25)}$$

Par conséquent, **μ = (0,60 M_u) / f_{bc} b d^2** est connu, donc α et les allongements ε_s et ε_s', ainsi que les contraintes σ_s et σ_s', qui résultent de ces allongements. On aura donc :

$$\boldsymbol{A_s' = \frac{0.4M_u}{(d-d')\sigma_s'}} \text{ et } \boldsymbol{A_s = A_s' + A_{s1}}$$

Pour armer la section on prendra $A_s' = A_s$ puisque, par hypothèse, les armatures doivent être symétriques.