PARTIE 3 : CALCUL DES SECTIONS RECTANGULAIRES EN FLEXION SIMPLE (SUITE)

2.2) Calcul à l'ELS

Lorsqu'après avoir dimensionné la section à l'ELU, la vérification à l'ELS n'est pas assurée, il faut redimensionner la section à l'ELS.

2.2.1) Généralités

Les états-limites de service sont des états au-delà desquels la structure (ou un élément de la structure) est mise hors service, c'est-à-dire qu'elle ne satisfait plus les conditions normales d'exploitation. Concernant ces états-limites de service, les vérifications portent sur :

- un état-limite de compression du béton : il s'agit de vérifier que la contrainte de compression dans le béton à l'ELS, ne dépasse pas la valeur admissible ($\sigma_b \leq \overline{\sigma_b}$) ;
- un état-limite d'ouverture des fissures : il s'agit de vérifier que la contrainte de traction dans les armatures tendues à l'ELS, ne dépasse pas la valeur admissible ($\sigma_s \leq \overline{\sigma_s}$) ;
- un état-limite de déformation : la déformation d'un élément fléchie doit rester dans les limites admises.

Dans les calculs relatifs aux états-limites de service (les sollicitations étant obtenues à l'aide de la combinaison d'action correspondant à l'état- limite de service), on admet les hypothèses suivantes :

1) Les sections droites, planes avant déformation, restent planes après déformation. On a vu qu'il résultait de cette hypothèse, que le diagramme des déformations était représenté par une droite et que la déformation d'une fibre était proportionnelle à sa distance à l'axe neutre.
2) Il n'y a pas de glissement relatif entre les armatures et le béton.
3) Le béton tendu est négligé.
4) Le béton et l'acier sont considérés comme des matériaux linéairement élastiques, c'est-à dire que la contrainte est proportionnelle à la déformation, donc :

$$\sigma = E.\varepsilon \qquad (26)$$

5) Par convention, le rapport entre les coefficients d'élasticité longitudinale de l'acier et du béton ou coefficient d'équivalence, est pris égal à :

$$n = E_s / E_b = 15 \qquad (27)$$

6) On ne déduit pas dans les calculs les aires des aciers de l'aire du béton comprimé. On

suppose en outre que la section d'acier est concentrée en son centre de gravité, pourvu que l'erreur ainsi commise sur les déformations unitaires ne dépasse pas 15 %.

Les hypothèses indiquées ci-dessus sont celles qui étaient admises dans les règlements ayant précédé les règles CBA 93 (*B.A.E.L)*, et en particulier, dans les règles *CCBA*-68. Elles permettent d'appliquer au béton armé les formules de la résistance des matériaux établies pour les corps homogènes, il suffit pour cela d'homogénéiser les sections de béton armé. Cette homogénéisation s'obtient:

- en remplaçant une section d'acier d'aire A_S par une section de béton d'aire $n\ A_S = 15\ A_S$, ayant même centre de gravité que la section d'acier considérée ;
- en admettant que chaque élément d'aire de béton conserve sa valeur géométrique dans la zone comprimée de la section et a une valeur nulle dans la zone tendue.

2.2.2. Calcul des contraintes à l'état-limite de service

Soit une section rectangulaire soumise à la flexion simple sous l'effet d'un moment M_{ser},.

- y_{ser} la hauteur du béton de la zone comprimée pour état limite de service).
- I le moment d'inertie de la section totale homogène par rapport au centre de gravité.
- La contrainte à une distance x de l'axe neutre est :

$$\sigma(x) = \frac{M_{ser}}{I}.x = k.x \tag{28}$$

- La contrainte maximale dans le béton comprimé ($x = y_{ser}$) :

$$\sigma_{bc} = k.y_{ser} \tag{29}$$

- La contrainte maximale dans l'acier tendu ($x = d - y_{ser}$):

$$\sigma_s = 15.k(d - y_{ser}) \tag{30}$$

a) Nouvelle position de l'axe neutre (détermination de y_{ser})

D'après les conditions d'équilibre statique :

$\Sigma F = 0$, $\Sigma M = 0$.

Les efforts agissants dans la section (fig. 8) à l'état-limite de service sont :

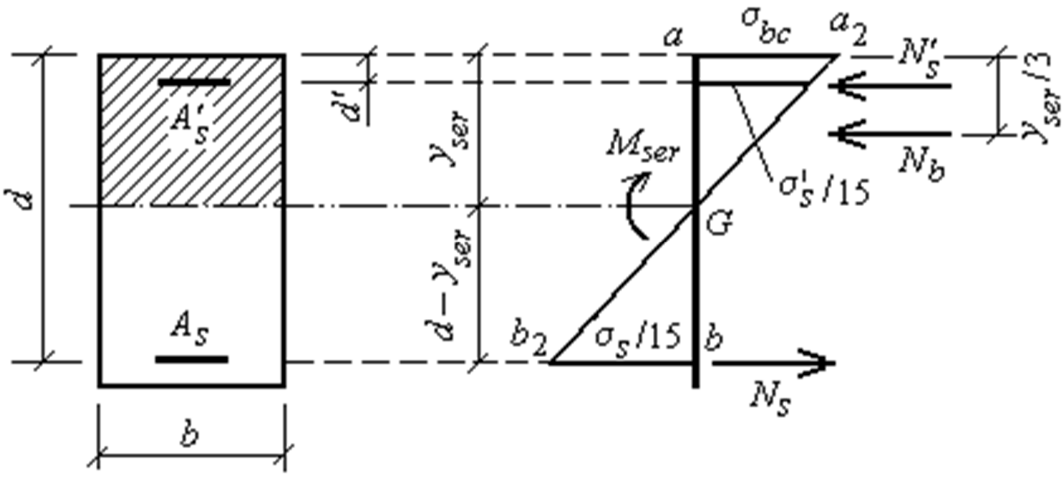

Fig.8. Section réctangulaire sollicitée en flexion simple à l'ELS

$$N_b = by_{ser}\sigma_{bc}/2 = Kby_{ser}^2/2 \tag{31}$$

$$N_s' = A_s'\,\sigma_s' = 15\,A_s'\,K\,(y_{ser} - d'); \tag{32}$$

$$N_s = A_s\,\sigma_s = 15\,A_s\,K\,(d - y_{ser}); \tag{33}$$

Alors, Σ F = 0, donne : N_s - N_b - N_s' = 0, ou encore :

$$15A_sK(d - y_{ser}) - \frac{Kby_{ser}^2}{2} - 15A_s'K(y_{ser} - d') = 0$$

$$by_{ser}^2 + 30(A_s' + A_s)y_{ser} - 30(d'A_s' + dA_s) = 0 \tag{34}$$

L'équation (34) s'obtient facilement, en exprimant le moment statique de la section totale homogène par rapport à son centre de gravité qui comme on le sait est nul.

En effet, le moment statique total de la section par rapport à son centre de gravité noté S est :

$$S = by_{ser}\frac{y_{ser}}{2} + 15A_s'(y_{ser} - d') - 15A_s(d - y_{ser}) = 0$$

D'où : après transformations : $by_{ser}^2 + 30(A_s' + A_s)y_{ser} - 30(d'A_s' + dA_s) = 0$

D'après cette équation (34) on trouve y_{ser} (la racine positive de cette équation).

Pour le cas de la section rectangulaire considérée, la solution de l'équation (6.5) est :

$$y_{ser} = \frac{15(A_s + A_s')}{b}\left[\sqrt{1 + \frac{b(dA_s + d'A_s')}{7.5(A_s + A_s')^2}} - 1\right] \tag{35}$$

b) Moment d'inertie de la section

En prenant la somme des moments par rapport au point G on a:

$\Sigma M = 0$; ce qui donne:

$$M_{ser} - N_b\,(2\,y_{ser}/3) - N_s'\,(y_{ser} - d') - N_s\,(d - y_{ser}) = 0 \qquad (36)$$

En remplaçant N_b, N_s' et N_s par leurs valeurs dans l'équation (36), on obtient :

$$\frac{M_{ser}}{K} = \frac{b y_{ser}^3}{3} + 15A_s'(y_{ser} - d')^2 + 15A_s(d - y_{ser})^2 \qquad (37)$$

Le moment d'inertie de la section rectangulaire totale rendue homogène par rapport à l'axe neutre a pour expression :

$$I = \frac{b y_{ser}^3}{3} + 15A_s'(y_{ser} - d')^2 + 15A_s(d - y_{ser})^2 \qquad (38)$$

Y_{ser} et I connus (équations 35 et 38), il est maintenant possible de déterminer les valeurs des contraintes σ_{bc} et σ_s (équations 29 et 30) et de les comparer aux valeurs admissibles.

Si une au moins des conditions exprimées en 2.2.1 ($\sigma_b \le \overline{\sigma_b}$; $\sigma_s \le \overline{\sigma_s}$), on procède à un redimensionnement de la section, sinon on garde les sections déterminées à l'ELU.

2.2.3. Calcul des sections lorsque l'ELS est le plus défavorable

1er Cas : La condition de compression du béton est assurée, la condition de fissuration n'est pas assurée

Dans ce cas, il faut recalculer la section d'aciers tendus A_s, en admettant que ces armatures travaillent au maximum possible ($\sigma_s = \overline{\sigma}_s$).

1er Cas : La section ne comporte que des armatures tendues (Figure 9).

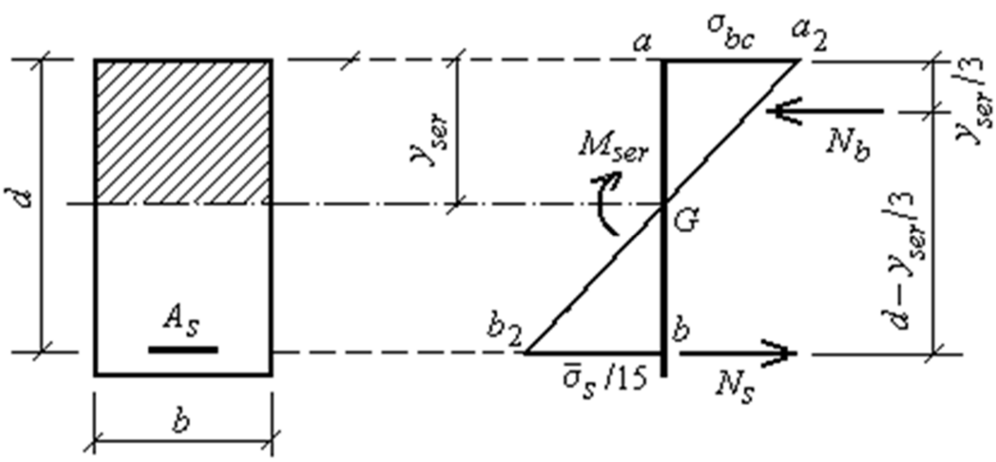

Figure 9. Section rectangulaire fléchie sans armatures comprimées

Pour le schéma considéré (fig. 9) on a :

$\Sigma F = 0 \Rightarrow N_b - N_s = 0$, avec : $N_b = by_{ser}\sigma_{bc}/2$ et $N_s = A_s\sigma_s$

On peut écrire :

$$\frac{by_{ser}\sigma_{bc}}{2} - A_s\overline{\sigma_s} = 0 \tag{39}$$

D'autre part,

$\Sigma M = 0$, donne:

$$M_{ser} = N_b\left(d - \frac{y_{ser}}{3}\right) = \frac{1}{2}by_{ser}\sigma_{bc}\left(d - \frac{y_{ser}}{3}\right) \tag{40}$$

En faisant travailler les aciers à leur maximum, on peut prendra $\sigma_s = \overline{\sigma_s}$

En outre, en considérant les triangles semblables Gb_2b et aa_2G, on peut écrire avec $y_{ser} = \alpha_1 d$,

$$\frac{\sigma_{bc}}{\alpha_1 d} = \frac{\overline{\sigma_s}}{15d(1-\alpha_1)} \tag{41}$$

D'où :

$$\sigma_{bc} = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\frac{\overline{\sigma_s}}{15} \tag{42}$$

En remplaçant σ_{bc} par son expression dans l'équation de M_{ser} (equation 40) et après transformations, on obtient l'équation :

$$\alpha_1^3\overline{\sigma_s} - 3\alpha_1^2\overline{\sigma_s} - \frac{90M_{ser}}{bd^2}\alpha_1 + \frac{90M_{ser}}{bd^2} = 0 \tag{43}$$

ayant pour solution (utile) :

$$\alpha_1 = 1 + 2\sqrt{\lambda}\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right), \text{ avec } \lambda = 1 + u \text{ ; } u = \frac{30M_{ser}}{bd^2\overline{\sigma_s}} \text{ et } cos\varphi = \frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}} \tag{44}$$

Connaissant la valeur de α_1, on peut déterminer la nouvelle section d'armatures tendues A_s à partir de l'équation d'équilibre des forces : $N_b = N_s$ (Equation 39) :

$$\boldsymbol{A_s = \frac{by_{ser}\sigma_{bc}}{2\overline{\sigma_s}} = \frac{\alpha_1 bd\sigma_{bc}}{2\overline{\sigma_s}}},$$

Avec $\frac{\sigma_{bc}}{\overline{\sigma_s}} = \frac{\alpha_1}{15(1-\alpha_1)}$; Ce qui donne en définitive :

$$\boldsymbol{A_s = \frac{\alpha_1^2}{30(1-\alpha_1)}bd} \tag{45}$$

On peut aussi utiliser les abaques ci-dessous (fig. 10) pour déterminer les valeurs de α_1, en fonction des valeurs de u.

N.B : Ici nous avons utilisé α_1 au lieu de α pour différencier avec l'ELU.

Courbes $\alpha = f(u)$

pour le dimensionnement en flexion simple à l'E.L.S.

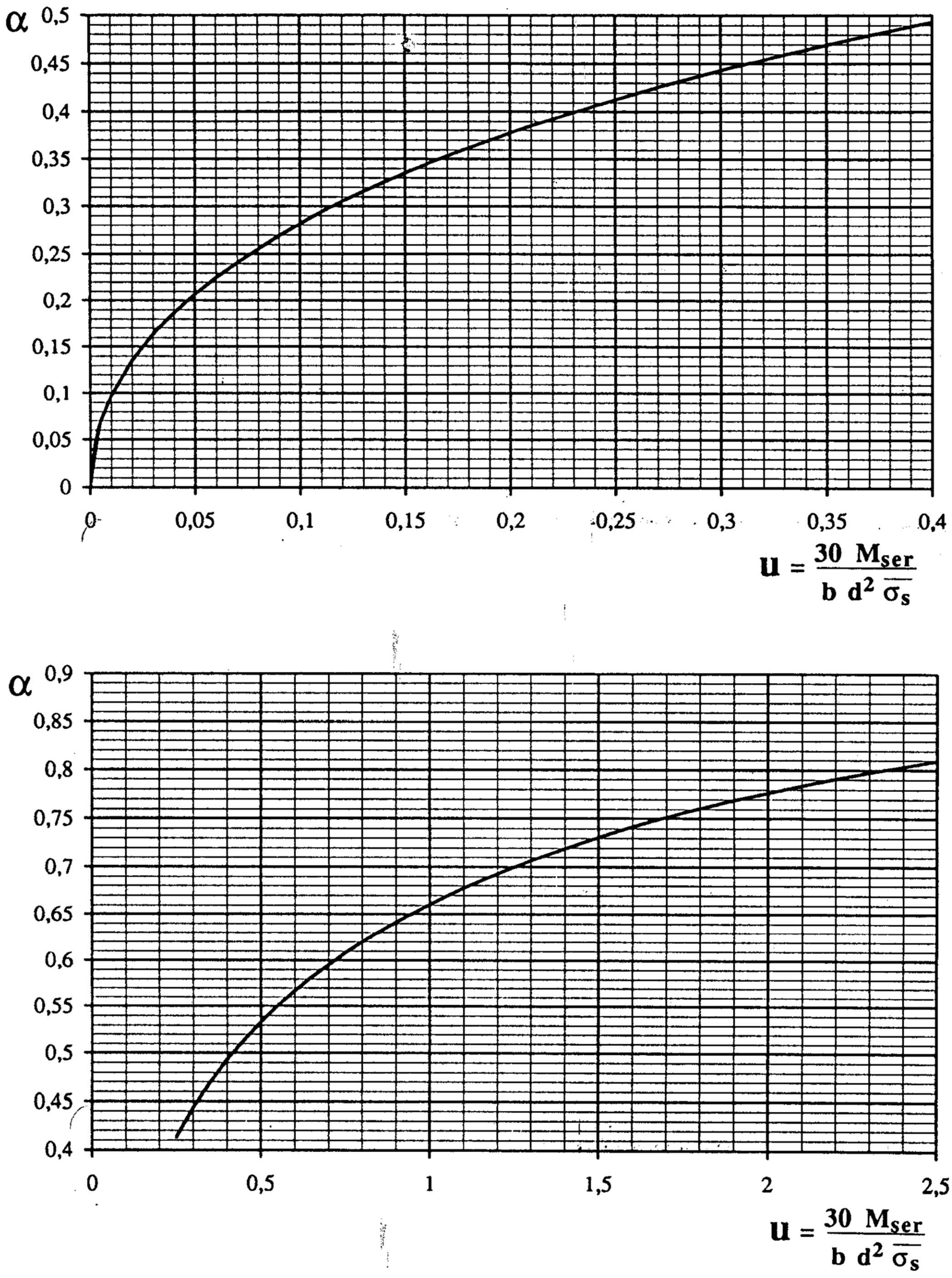

Fig. 10. Sections rectangulaires fléchies à l'ELS. Courbes $\alpha_1 = f(u)$

2ème Cas : La condition de compression du béton n'est pas assurée

Si la condition de compression du béton n'est pas assurée, donc $\sigma_{bc} > 0.6f_{cj}$, on peut soit redimensionner la section du béton, soit introduire des armatures comprimées (ou augmenter leur section s'il y en a déjà).

1) *Redimensionnement de la section de béton.*

Pour aboutir aux dimensions minimales de la section, on fait travailler les deux matériaux à leurs limites $\overline{\sigma_s}$ et $\overline{\sigma_{bc}} = 0.6f_{cj}$

La position de l'axe neutre peut être déterminée d'après les triangles semblables (fig. 11) :

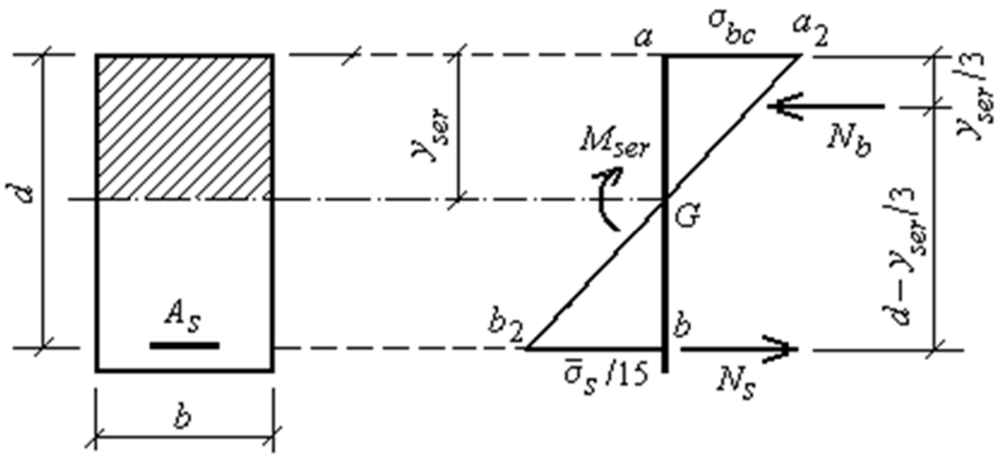

Fig. 11 Diagramme des contraintes d'une section rectangulaire fléchie à l'ELS

A partir de la figure 11, on peut ecrire en utilisant la théorie des triangles semblables :

$\frac{\overline{\sigma_{bc}}}{\left(\frac{\overline{\sigma_s}}{n}\right)} = (0.6f_{cj})/(\overline{\sigma_s}/n)$ ou encore (d'après la formule 42) :

$$\frac{(0.6f_{cj})}{\left(\frac{\overline{\sigma_s}}{n}\right)} = \alpha_1/(1-\alpha_1) \qquad (46)$$

D'où on trouve :

$$\alpha_1 = 0.6f_{cj}/(0.6f_{cj} + \overline{\sigma_s}/n) \qquad (47)$$

Avec $n = 15$, on a définitivement :

$$\alpha_1 = 9f_{cj}/(9f_{cj} + \overline{\sigma_s}) \qquad (48)$$

L'équilibre de la section (sans armatures comprimées) s'écrit :

$$M_{ser} = [by_{ser}\sigma_{bc}(d - y_{ser}/3)]/2 \quad (49)$$

ou encore avec $y_{ser} = \alpha_1 d$,

$$M_{ser} = 0.5b\alpha_1 d\ 0.6\ f_{cj}d(1 - \alpha_1/3) = 0.1bd^2 f_{cj}\alpha_1(3 - \alpha_1) \quad (50)$$

D'où $\boldsymbol{bd^2 = 10M_{ser}/[\alpha_1(3 - \alpha_1)f_{cj}]}$, (51)

ou encore :

$$\boldsymbol{bd^2 = 10M_{ser}(9f_{cj} + \overline{\sigma_s})^2/27f_{cj}^2(6f_{cj} + \overline{\sigma_s})} \quad (52)$$

D'après cette équation on précise les dimensions *b* et *d*, ensuite on détermine la section des armatures tendues :

$$\boldsymbol{A_s = \frac{0.3\alpha_1 bdf_{cj}}{\overline{\sigma_s}}} \quad (53)$$

2) *La section comporte des armatures tendues et des armatures comprimées.*

Si par application de la méthode pour une section qui ne comporte que des armatures tendues, on trouve $\sigma_{bc} > \sigma_{bc}$, il est nécessaire de prévoir des armatures comprimées (ou d'augmenter les dimensions de la section du béton).

Si on décide d'introduire des armatures comprimées, on prend la contrainte de service et on fait le calcul par la méthode suivante. à l'aide de l'équation (48) on calcule le coefficient α_1 : $\boldsymbol{\alpha_1 = \frac{15(y_{ser} - d')\overline{\sigma_{bc}}}{y_{ser}} = 9f_{cj}/(9f_{cj} + \overline{\sigma_s})}$

Ensuite on détermine : $y_{ser} = \alpha_1 d$, et la contrainte de l'armature comprimée (fig.8):

$$\frac{\overline{\sigma_{bc}}}{y_{ser}} = \frac{\sigma_s'}{15(y_{ser} - d')}$$

D'où :

$$\boldsymbol{\sigma_s' = [15(y_{ser} - d')\overline{\sigma_{bc}}/y_{ser}] = 9f_{cj}(1 - d'/\alpha_1 d)} \quad \textbf{(54)}$$

L'effort normal dans le béton comprimé est :

$$N_{bc} = 0.5\overline{\sigma_{bc}} b \alpha_1 d \tag{55}$$

Le moment repris par le béton comprimé (par rapport au centre de gravité des armatures tendues) est :

$$M_{bc} = N_{bc}(d - \alpha_1 d/3) = 0.5\overline{\sigma_{bc}} b \alpha_1 d d(1 - \alpha_1/3) = 0.1 f_{cj} \alpha_1 (3 - \alpha_1) b d^2 \tag{56}$$

L'effort normal repris par les armatures comprimées :

$$N'_s = A'_s \sigma'_s \tag{57}$$

Le moment repris par les armatures comprimées :

$$M'_s = N'_s(d - d') = A'_s \sigma'_s (d - d') \tag{58}$$

$$M'_s = M_{ser} - M_{bc} \tag{59}$$

Les nouvelles sections d'armatures seront obtenues par :

$$\boxed{A'_s = \frac{M'_s}{\sigma'_s(d-d')} = \frac{M_{ser} - 0.1\alpha_1(3-\alpha_1)bd^2}{\sigma'_s(d-d')} f_{cj}} \tag{60}$$

$$\boxed{A_s = \frac{N'_s + N_{bc}}{\overline{\sigma_s}} = \frac{A'_s \sigma'_s + 0.3\alpha_1 b d f_{cj}}{\overline{\sigma_s}}} \tag{61}$$