CHAP.VIII/ ETAT-LIMITE DE SERVICE DES DEFORMATIONS- CALCUL PRATIQUE DES FLECHES

1) Introduction

Les états-limites de déformation s'expriment par des valeurs admissibles des déplacements d'un élément. **Le calcul des déformations est effectué pour évaluer les flèches dans l'intention de fixer la contre-flèche à la construction ou de limiter les déformations de service. Le calcul des déformations globales doit tenir compte des phases successives de la construction et des différentes sollicitations exercées**. Mais les déformations obtenues lors des phases successives de la construction ne sont pas automatiquement cumulables en raison de la fissuration de béton. Pour tenir compte de l'existence éventuelle de fissures dans les zones tendues, on substitue dans les calculs, au moment d'inertie I_o de la section totale rendue homogène, un moment d'inertie fictif I_f évalué empiriquement. Compte tenu de ce but recherché, on tient compte, si nécessaire des déformations différées du béton (retrait et fluage) et de celles dues à la température. Dans le cas courant de calcul des déplacements, on utilise les relations classiques de la Résistance des matériaux en introduisant un moment d'inertie fictif et le module d'élasticité instantané ou différé du béton.

2) Théorie de calcul des flèches

La courbure de la section, dans les traités de Résistance des matériaux, est déterminée par $1 / r = M / E I$.

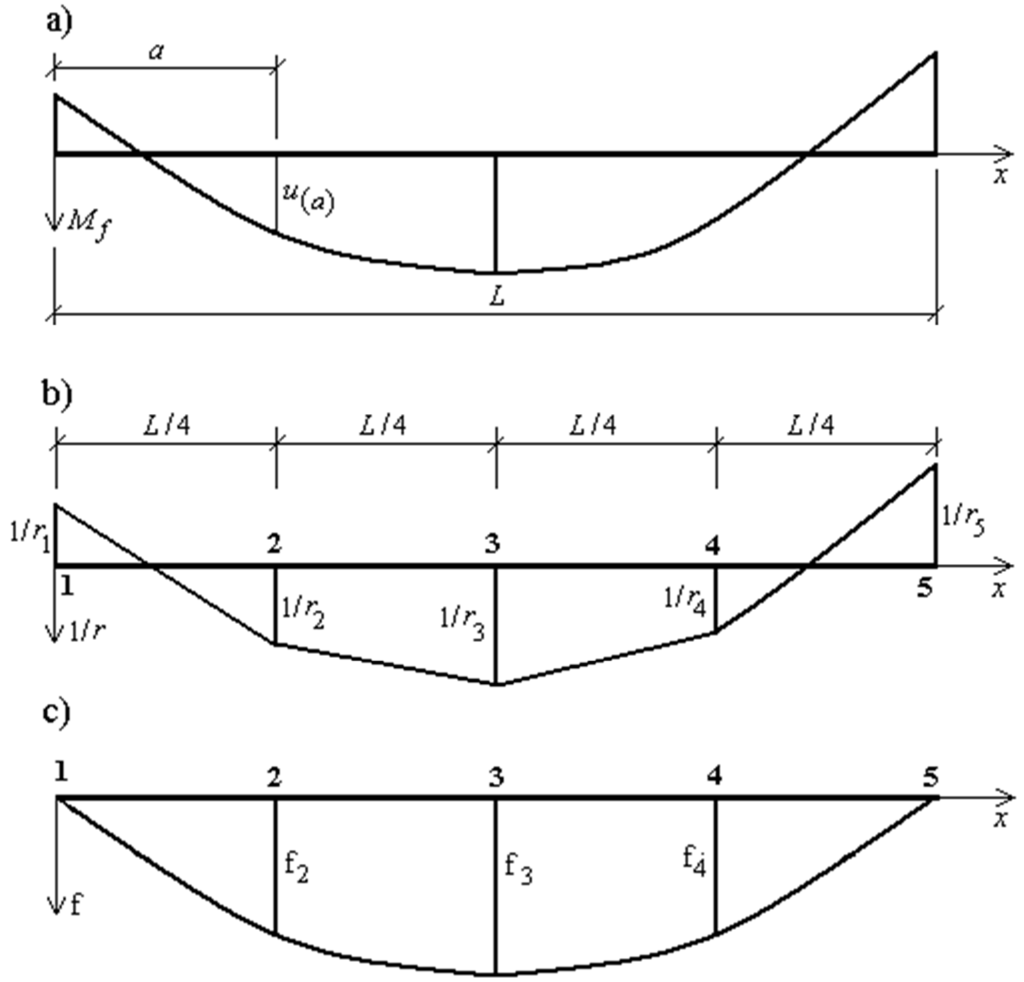
La flèche $u(a)$ dans une section quelconque d'abscisse "a" ("a" étant compté à partir de l'appui de gauche) d'une poutre soumise à un moment de flexion M est égale au moment de flexion fictif qui serait produit dans cette même section dans la travée isostatique équivalente soumise à une charge répartie fictive $M / E I$, c'est-à-dire que l'on a, en appelant L la portée de la travée:

$$u(a) = \frac{L-a}{L}\int_0^a \frac{Mx\,dx}{EI} + \frac{a}{L}\int_a^L \frac{M(L-x)dx}{EI}$$

ou avec $1 / r = M / E I$:

$$u(a) = \frac{L-a}{L}\int_0^a \frac{1\,dx}{r} + \frac{a}{L}\int_a^L \frac{1(L-x)dx}{r} \quad (1)$$

Pour le calcul on divise la portée de la travée en (n - 1) éléments égaux et on suppose connues les valeurs des courbures aux n points de division, soit $1/r_1$, $1/r_2$, $1/r_3$ . . . La courbure sera positive si le moment M est positif, et négative si M est négatif. On suppose qu'entre deux points de division la courbure varie linéairement, on peut alors tracer le diagramme des courbures dans lequel a_1 - a_2, a_2 - a_3, sont des droites (fig.1). Pour simplifier le raisonnement on divise la travée en quatre tronçons de longueur L/4.



a - épure des moments de flexion; b - schéma de calcul des courbures; c - schéma de calcul des flèches

On obtient ainsi par intégration les flèches f_2, f_3 et f_4 :

$$f_2 = \left[\frac{3}{r_1} + \frac{14}{r_2} + \frac{12}{r_3} + \frac{6}{r_4} + \frac{1}{r_5}\right]\frac{L^2}{384} \qquad (2)$$

$$f_3 = \left[\frac{2}{r_1} + \frac{12}{r_2} + \frac{20}{r_3} + \frac{12}{r_4} + \frac{2}{r_5}\right]\frac{L^2}{384} \qquad (3)$$

$$f_4 = \left[\frac{1}{r_1} + \frac{6}{r_2} + \frac{12}{r_3} + \frac{14}{r_4} + \frac{3}{r_5}\right]\frac{L^2}{384} \qquad (4)$$

En prenant en compte que $1 / r = Mx / E I$ et $Mx = p\, x\, (L - x) / 2$, on obtient les valeurs de $1/r$:

- pour le point 1: $x = 0$, $1/ r_1 = 0$; (5)
- pour le point 2: $x = L /4$, $1/ r_2 = 3\, p\, L2 / 32\, E I$; (6)
- pour le point 3: $x = L /2$, $1/ r_3 = 4\, p\, L2 / 32\, E I$; (7)

- pour le point 4: $x = 3\,L/4$, $1/r_4 = 3\,p\,L2 / 32\,E\,I$; (8)

- pour le point 5: $x = L$, $1/r_5 = 0$. (9)

Alors on peut calculer les flèches, soit f_3 :

$$f_3 = \left[2.0 + \frac{12.3pL^2}{32EI} + \frac{20.4\,pL^2}{32EI} + \frac{12.3pL^2}{32EI} + 2.0\right]\frac{L^2}{384} = \frac{4.75\,pL^4}{384\,EI} \tag{10}$$

On note que pour une poutre de section constante, supposée constituée d'un matériau homogène, reposant sur deux appuis simples et supportant une charge uniformément répartie *p*, la résistance des matériaux donne, pour la flèche au milieu de la portée:

$$f = \frac{5\,pL^4}{384\,EI} \tag{11}$$

Donc on a que la différence des résultats données par la formule (6.49) et (6.50) est de 100 % (5 - 4,75) / 5 = 5 %, c'est-à-dire que la division de la poutre en quatre tronçons donne déjà une très bonne approximation. Si une précision supérieure est requise, on pourrait effectuer ce même calcul avec 8 tronçons de longueur $L/8$, alors on obtiendrait le coefficient 4,94 au lieu de 4,75 (soit une erreur de 1,2%)

$$f = \frac{4.94\;pL^4}{384\,EI} \tag{12}$$

Il faut noter que le calcul des flèches avec division de la travée en tronçons devient tout à fait nécessaire, si on a affaire avec des éléments de dimensions transversales variables suivant la longueur ou encore, si on veut prendre en compte la variation des rigidités des tronçons à cause de différents taux de l'ouverture des fissures.

Par conséquent, dès que les courbures en un certain nombre de sections seront connues, il sera possible de déterminer les flèches.

En pratique, on utilise l'une des deux méthodes suivantes pour l'estimation de la déformation :

- **La méthode dite générale**
- **La méthode forfaitaire (la plus courante dans les calculs de béton armé)**

3) Calcul des flèches par la méthode générale

Dans ce cas les courbures sont calculées a l'état-limite de service à partir du diagramme des contraintes dans la section considérée. Pour évaluer les courbures on utilise la *méthode générale* de calcul.

Le déroulement du calcul est le suivant :

- On découpe la travée de poutre considérée en quatre tronçons égaux ce qui determine cinq sections de calcul (fig.1)

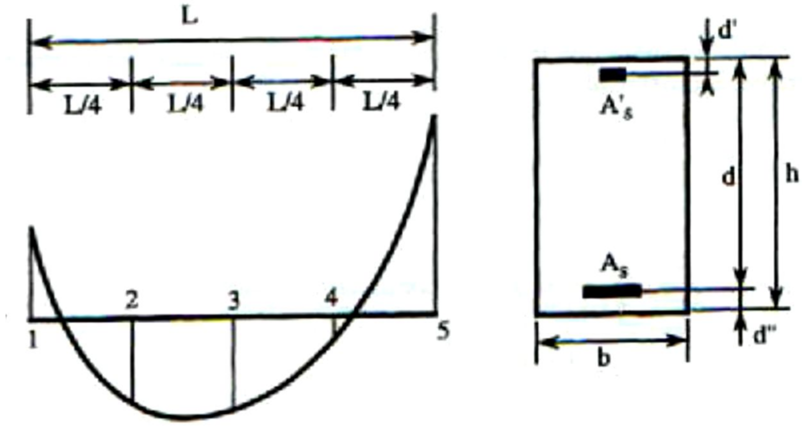


Fig.1

- Pour chaque section le données sont : les dimensions b, h, d, d' et d'' (d''= h – d), les sections As et A's et le moment de service Mser.
- Les matériaux utilisés ont les caractéristiques suivantes : f_{c28},

$f_{t28} = 0.6 + 0.06 f_{c28}$; $E_i = 11000\sqrt[3]{f_{c28}}$ (13)

- Pour chaque section on calcule :
- la position de l'axe neutre y solution de :

$$by_{ser} + 30(A_s + A'_s)y_{ser} - 30(dA_s + d'A'_s) = 0 \quad (14)$$

- le moment d'inertie :

$$I = \frac{d(y_{ser})^3}{3} + 15[A_s(d - y_{ser})^2 + A'_s(y_{ser} - d')^2] \quad (15)$$

- les contraintes :

$$\sigma_{bc} = \frac{My_{ser}}{I} \text{ et } \sigma_s = \frac{15M(d - y_{ser})}{I} \quad (16)$$

- Les déformations: $\varepsilon_{bc} = \frac{\sigma_{bc}}{E_i}$; $\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{15E_s}$ (17)
- $\rho_f = \frac{A_s}{b_0 c_0}$ avec $c_0 \geq max\{0.3d; 2d''\}$ (18)

Si $\rho_f \geq \frac{f_{tj}}{\sigma_s}$, on prend $\Delta\varepsilon_s = \frac{f_{tj}}{2E_s\rho_f}$ (19)

Si $\rho_f < \frac{f_{tj}}{\sigma_s}$, on prend $\Delta\varepsilon_s = 0$ (20)

Puis on détermine : $\varepsilon_s^* = \varepsilon_s - \Delta\varepsilon_s$ (21)

Et $\boldsymbol{\frac{1}{r} = \frac{(\varepsilon_s^* + \varepsilon_{bc})}{d}}$ **(x signe de Mser)** **(22)**

Après avoir déterminé les courbures on calcule les flèches f_i par :

$$\boldsymbol{f_i} = \frac{\boldsymbol{L^2}}{\boldsymbol{384}} \sum_{j=1}^{j=5} \boldsymbol{k_{ij}} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r_j}} \; ; \tag{23}$$

Ou les k_{ij} sont les coefficients établis précédemment. Par exemple :

$$f_3 = \left(\frac{3}{r_1} + \frac{12}{r_2} + \frac{20}{r_3} + \frac{12}{r_4} + \frac{2}{r_5}\right)\frac{L^2}{384} \tag{24}$$

4) Calcul des flèches par la méthode forfaitaire (la plus courante)

Dans ce cas, on utilise les formules dans lesquelles les valeurs des coefficients qui interviennent ont été "ajustées" en fonction des résultats expérimentaux de mesures de flèches, généralement sous chargement instantané. Pour tenir compte de l'existence éventuelle de fissures dans les zones tendues, on substitue dans les calculs, au moment d'inertie Io de la section totale rendue homogène, un moment d'inertie fictif If évalué empiriquement :

$$I_f = \frac{1.1\, I_0}{(1+\lambda\mu)} \tag{25}$$

Où I_o est le moment d'inertie de la section totale homogène.

Avec n = 15, pour une section rectangulaire :

$$I_0 = \frac{bh^3}{12} + 15\left[A_s\left(\frac{h}{2} - d''\right)^2 + A_s'\left(\frac{h}{2} - d'\right)^2\right] \tag{26}$$

(Formule approchée supposant que le centre de gravité de la section totale homogène coïncide avec centre géométrique).

λ et μ , les coefficients qui sont définis par :

- pour les déformations instantanées :

$$\lambda_i = 0.05 f_{t28}/[(2 + 3b_0/b)\rho] \tag{27}$$

- pour les déformations différées :

$$\lambda_v = \frac{0.02 f_{t28}}{\left[\left(2+\frac{3b_0}{b}\right)\rho\right]} = 0.4\lambda_i \tag{28}$$

$$\mu = 1 - \left[\frac{1.75 f_{t28}}{(4\rho\sigma_s + f_{t28})}\right] > 0, \text{ si non } \mu=0. \tag{29}$$

Dans ces expressions $\rho = As / b_o\, d$, le coefficient de ferraillage de la section, b_o et b, les largeurs de la nervure et de la table de compression.

Les courbures $1/r_i$ et $1/r_v$ sont évaluées en prenant en compte respectivement les moments d'inertie If_i et If_v correspondant à λ_i et λ_v et les modules de déformation E_i et $E_v = E_i/3$:

$$\frac{1}{r_i} = \frac{M}{E_i I_{fi}},\ \frac{1}{r_v} = \frac{M}{E_v I_{fv}} \tag{30}$$

M étant le moment de flexion qui sollicite la section considérée sous la combinaison envisagée.

A défaut d'une justification fondée sur l'évaluation des déformations à partir des valeurs des courbures, on peut admettre que les flèches f_i et f_v sont égales à :

$$f_i = \frac{ML^2}{10E_i I_{fi}}\ ;\ f_v = \frac{ML^2}{10E_v I_{fv}}. \tag{31}$$

Ces expressions étant applicables aux poutres simplement appuyées ou continues et aux bandes de dalles continues ou non, dirigées dans le sens de la petite portée. Dans tous les cas : *L,* désigne la portée mesurée entre nus des appuis de la travée et *M,* le moment de flexion maximal produit dans cette travée par le cas de charge envisagé. Ce moment ne doit pas être inférieur aux valeurs données par application de la "méthode forfaitaire" de calcul des moments.

Pour les consoles, à défaut de justifications plus précises, on peut admettre que les flèches de l'extrémité de la console ont pour valeur :

$$f_i = \frac{ML^2}{4E_i I_{fi}}\ ;\ f_v = \frac{ML^2}{4E_v I_{fv}} \tag{32}$$

La flèche totale d'un élément est déterminée comme la somme algébrique des flèches dues aux charges permanentes (de longue durée) et aux charges d'exploitation (de courte durée):

$$\Delta f_t = f_{gv} + f_{pi} - f_{gi} \tag{33}$$

avec Δf, la flèche totale due à l'ensemble des charges permanentes et d'exploitation;

f_{gv}, la flèche différée due aux charges permanentes;

f_{pi}, la flèche instantanée due à l'ensemble des charges permanentes et d'exploitation;

f_{gi}, la flèche instantanée due aux charges permanentes.

Pour des faibles valeurs de σ_s, c'est-à-dire sous les faibles sollicitations, le coefficient μ est nul, donc le moment d'inertie I_f est ainsi égal au moment d'inertie I_0 de la section totale homogène; ce qui est justifié par le fait que, sous de faibles charges, la poutre ne soit pas fissurée, sous réserve que ces charges soient les premières à intervenir. C'est pourquoi il est nécessaire de tenir compte dans le calcul des déformations de l'ordre dans lequel interviennent les diverses charges dont on veut évaluer les effets; en particulier, la détermination de la part de la flèche totale qui est susceptible d'affecter le bon comportement des cloisons doit être effectuée de la façon suivante:

$\mathbf{\Delta f_t = f_{gv} - f_{ji} + f_{pi} - f_{gi}}$ (34)

où f_{ji}, la flèche instantanée due aux charges permanentes avant mise en place des cloisons.

Vu que la flèche différée f_{gv} est engendrée par l'ensemble des charges "*g*" (charge permanente après mise en place des cloisons), mais, comme au moment de la mise en place des cloisons les charges « *j* » (charge permanente avant mise en place des cloisons) avaient déjà provoqué une flèche instantanée f_{ji}, alors la flèche définitive due aux charges permanentes sera :

$f_{gv} - f_{ji}$. La flèche instantanée due aux charges d'exploitation est : $f_{pi} - f_{gi}$.

Pour le calcul de ces différentes flèches on prend en compte, dans le calcul de μ, la valeur de σ_s correspondant au cas de charge envisagé.

5) Valeurs limites des flèches

Les valeurs limites qui peuvent résulter des conditions particulières d'exploitation des ouvrages sont fixées par les Normes. Ce peut être le cas du bon fonctionnement de machines ou d'appareils dans certaines installations industrielles.

Pour des bâtiments à étages on peut admettre que la part de flèche qui est susceptible de mettre en cause le bon comportement des cloisons et des revêtements de sols ou de plafonds ne doit pas dépasser :

- pour les éléments reposant sur deux appuis :

$l / 500$ si la portée l est au plus égale à 5 *m*, 0,5 *cm* + $l / 1000$ dans le cas contraire;

- pour les éléments en console :

$l / 250$ si la portée est au plus égale à 2 *m*.

6) Remarques

1) On considère qu'il n'est pas nécessaire de calculer la flèche d'une poutre si cette poutre est associée a un hourdis et si toutes les inégalités suivantes sont vérifiées :

$h / l \geq 1/16$;

$h / l \geq Mt / 10\, Mo$;

$As / bo\, d \geq 4,2 / fe$ (fe en *MPa*).

Si le plancher supporte des cloisons il faut, en outre, que la portée de la poutre soit inférieure à 8 *m*.

Les notations utilisées sont :

l, portée de la travée entre nus d'appuis;

h, hauteur totale de la section droite; d, hauteur utile de la section droite; bo, largeur de la nervure;

M_t, moment fléchissant maximal en travée;

M_o, moment fléchissant maximal dans la travée supposée indépendante et reposant sur deux appuis libres;

A_s, section des armatures tendues;

f_e, limite élastique, en MPa, de l'acier utilisé.

2) On considère également qu'il n'est pas nécessaire de calculer la flèche d'un **hourdis rectangulaire** (dalle) portant sur ses quatre côtés si les inégalités suivantes sont satisfaites :

$^{h}/_{l_x} \geq {}^{M_t}/_{20M_x}$;

$^{A_s}/_{bd} \leq {}^{2}/_{f_e}$ (f_e en MPa)

avec, en plus des notations déjà envisagées:

M_x, moment maximal en travée par bande de largeur unitaire, dans le sens lx, lorsque la dalle est supposée reposer librement sur ses appuis ($Mx > My$);

M_t, moment en travée par bande de largeur unité dans le sens lx, compte tenu des efforts d'encastrement ou de continuité (Mt ne peut être pris inférieure à 0,75 Mx);

As, section des armatures tendues par bande de largeur b (en général $b = 100$ cm).

- Dans les dalles rectangulaires à un seul sens de portée (poutres – dalles) et les dalles reposant sur quatre cotés et d'élancement$\propto < 0.4$, les sollicitations se calculent comme dans une poutre ; il en est de même pour les flèches.
- Dans les dalles rectangulaires reposant sur quatre cotés et d'élancement$\propto \geq 0.4$, la flèche au centre se calcule de la façon suivante :
  - On calcule la flèche comme dans une poutre de portée l_x (petite dimension), de largeur b = 1m et soumise aux moments de flexion de service déterminés dans le sens x ;
  - On multiplie le résultat obtenu par (1-0.1α) avec $\propto = {}^{l_x}/_{l_y}$