CHAPITRE XI. JUSTIFICATION DES SECTIONS SOUMISES A LA FLEXION COMPOSÉE

1) Définitions

Une section droite (S) d'une pièce était soumise à la flexion composée si les forces et les couples agissant à gauche de (S) pouvaient être réduits, par rapport à un point G_0 de l'axe cette section (fig.11.1), à :

- un couple de moment *MG* (moment de flexion), d'axe perpendiculaire au plan de symétrie de la section ;
- une force *N* (effort normal), perpendiculaire à (S), dirigée vers la droite dans le cas d'un effort de compression et vers la gauche dans le cas d'un effort de traction ;
- une force *V* (effort tranchant), portée par l'axe de symétrie de la section.

Dans le présent chapitre, on étudie uniquement les effets du moment de flexion M_G et de l'effort *N*, ceux de l'effort tranchant *V* seront étudiés ultérieurement.

Le système constitué par M_G et *N* peut être remplacé par une force unique *N*, appliquée au centre de pression *C*, distant de G_0 d'une quantité $e = M_G / N$. Le moment M_G peut avoir un signe quelconque, dans ce qui suit, on supposera toujours que M_G est positif. Si M_G est négatif, il suffit de retourner la figure, le haut devenant le bas et inversement, car le signe de M_G influe uniquement sur la position de la fibre la plus comprimée ou la plus tendue.

Lorsqu'il sera nécessaire de faire une distinction entre *N* effort de compression et *N* effort de traction, *N* sera affecté du signe "plus" en cas d'effort de compression et "moins" en cas d'effort de traction.

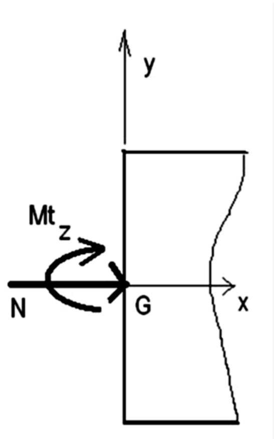


Fig.11.1

Lorsque l'effort normal est un effort de compression, il est nécessaire de vérifier l'état-limite ultime de stabilité de forme de la pièce à laquelle appartient la section étudiée (les principes de cette vérification seront exposés un peu plus tard).

2) Calcul des sections entièrement tendues/Cas des sections rectangulaires

2.1.) Calcul à l'ELU

Une section sera entièrement tendue si l'effort *N* est un effort de traction et si le centre d'application *"C"* se trouve entre les armatures.

En effet, dans ce cas, *Nu* peut être décomposé en deux forces de traction *N*1 et *N*2 passant par les centres de gravité des armatures supérieures et des armatures inférieures (fig. 11.2).

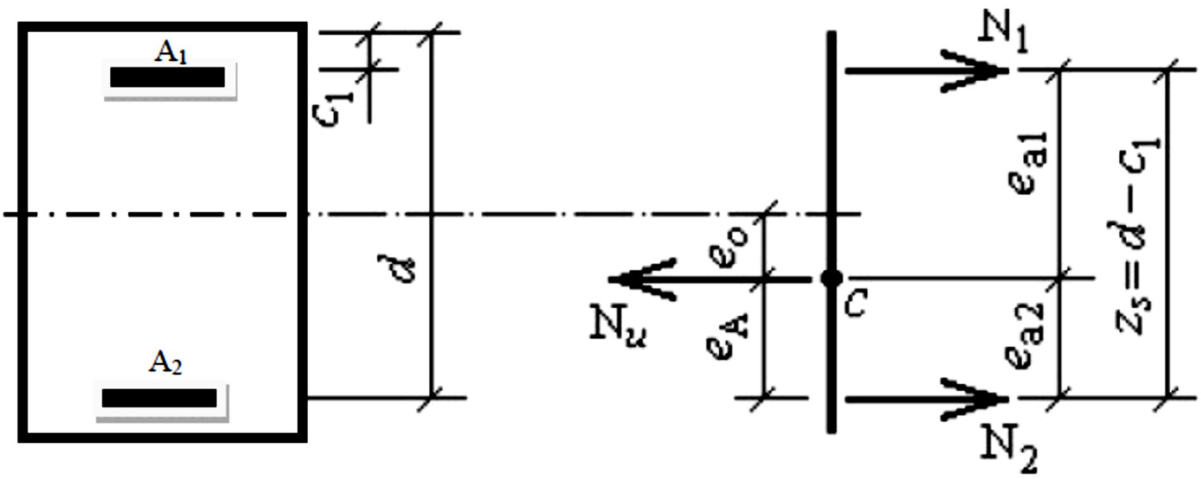


Fig.11.2

On désigne :

$A1$, la section des armatures supérieures, σs1 leur contrainte ;

$A2$, la section des armatures inférieures, σs2 leur contrainte. On a alors :

$N_1 = A_1\sigma_{s1}$ (11.1)

$N_2 = A_2\sigma_{s2}$ (11.2)

Pour le schéma considéré on peut écrire :

- $N_u = N_1 + N_2$ ou encore : $N_u = A_1\sigma_{s1} + A_2\sigma_{s2}$ (11.3)
- $N_u e_{A2} = N_1(d - C_1)$ (11.4)

D'ou on trouve :

$A_1 = \frac{N_u e_{A2}}{(d-C_1)\sigma_{s1}}$ (11.5)

$A_2 = \frac{N_u e_{A1}}{(d-C_1)\sigma_{s2}}$ (11.6)

Du point de vue économique, on a intérêt à prendre, pour chacune des contraintes σ_{s1} et σ_{s2} la plus grande valeur possible, on prend donc celle correspondant à l'allongement maximal :

ε_s = 10 ‰, que l'on appelle : $\sigma_{s10} = \sigma_{su}$. Alors avec $\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = \sigma_{s10} = \sigma_{su}$, les relations (11.5) et (11.6) deviennent :

$$A_1 = \frac{N_u e_{A2}}{(d - C_1)\sigma_{su}} \tag{11.7}$$

$$A_2 = \frac{N_u e_{A1}}{(d - C_1)\sigma_{su}} \tag{11.8}$$

La solution avec armatures symétriques est:

$$A_1 = A_2 = \frac{N_u \gamma_s}{2 f_e} \tag{11.9}$$

La section minimale des armatures doit être au moins égale à:

$$A_{min} = \frac{B\, f_{t28}}{fe} \tag{11.10}$$

où B est l'aire d'une section de béton ($B = b$ x h, pour une section rectangulaire).

2.2) Calcul a l'ELS

2.2.1) Détermination des contraintes

Une section sera entièrement tendue à l'ELS si l'effort normal est un effort de traction et si le centre de pression C (point de passage de la résultante des forces situées à gauche de la section) se trouve entre les armatures.

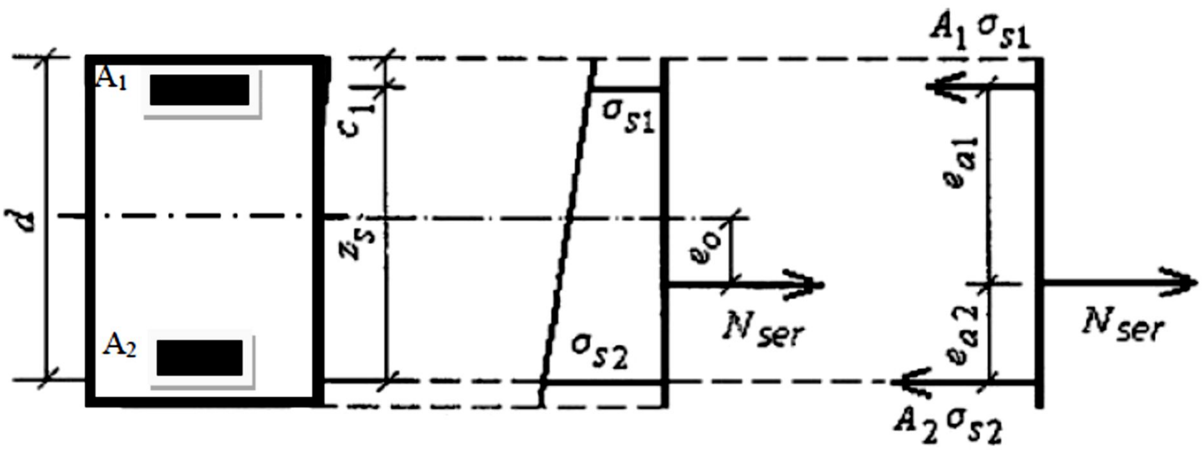


Fig.11.3

On aura alors avec les notations indiquées sur la figure (11.3), où e_{a2} représente la distance du centre de pression C à l'armature inférieure et e_{a1}, la distance à l'armature supérieure (en écrivant successivement le moment par rapport à A_1 et A_2):

$$\sigma_{s1} = \frac{N_{ser} e_{a2}}{Z_s A_1} \tag{11.11}$$

$$\sigma_{s2} = \frac{N_{ser} e_{a1}}{Z_s A_2} \tag{11.12}$$

2.2.2) Détermination des armatures

La section est entièrement tendue. Dans ce cas l'effort normal N_{ser} est un effort de traction et le centre de pression C se trouve entre des armatures. On aura alors, avec les notations déjà utilisées et définies sur la figure (11.3)

$$A_1 = \frac{N_{ser} e_{A2}}{Z_s \overline{\sigma_s}} \tag{11.13}$$

$$A_2 = \frac{N_{ser} e_{A1}}{Z_s \overline{\sigma_s}} \tag{11.14}$$

Lorsque la section est soumise à la traction simple, donc la force de traction N_{ser} passe par le centre de gravité, on a :

$$A_1 = A_2 = \frac{N_{ser}}{2\overline{\sigma_s}} \tag{11.15}$$

3) Calcul des sections partiellement comprimées

3.1.) Calcul à l'ELU

Une section sera partiellement comprimée :

- si le centre de pression *C* se trouve à l'extérieur du segment limité par les armatures (l'effort normal peut être de traction ou de compression):

- si le centre de pression *C* se trouve à l'intérieur du segment limité par les armatures (l'effort normal est un effort de compression) et si la condition suivante est vérifiée:

- pour une section rectangulaire:

$$N_u (d - d') - M_{As} \leq [0{,}337 - (0{,}81\ d'/h)]\ b\ h^2 f_{bc}, \tag{11.16}$$

Où : $M_{As} = Nu\ e_A$, (11.17)

représente le moment par rapport au centre de gravité des armatures inférieures.

La figure 11.4 représente une section rectangulaire soumise à un effort de compression N_u passant par le centre de pression *C*. Soit la section est partiellement comprimée.

On notera :

N_b, la résultante des forces de compression dans le béton;

N_s', la résultante des forces de compression dans les armatures comprimées A_s' pour lesquelles la contrainte est σ_s', alors

$$N_s' = A_s'\ \sigma'_s \tag{11.18}$$

N_s, la résultante des forces de traction dans les armatures tendues

A_s pour lesquelles la contrainte est σ_s, alors :

$$N_s = A_s\ \sigma_s\ ; \tag{11.19}$$

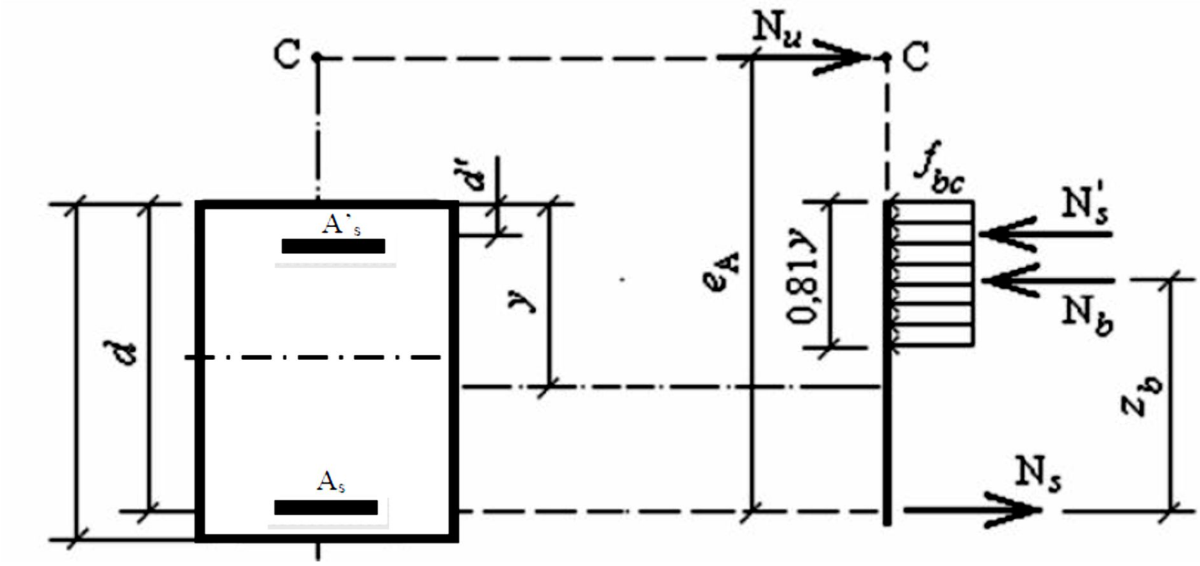


Fig. 11.4

D'après le schéma, on peut écrire une équation :

$\boldsymbol{N_u + N_s - N_b - N_s' = Nu + A_s\,\sigma_s - N_b - A_s'\sigma_s' = 0}$. (11.20)

Pour la deuxième équation on prend les moments par rapport au centre de gravité des armatures inférieures :

$\boldsymbol{N_s\,e_A - N_s'(d - d') - z_b\,N_b = N_u\,e_A - A'_s\,\sigma'_s\,(d - d') - z_b\,N_b = 0}$ (11.21)

e_A, la distance du centre de pression C au centre de gravité des armatures tendues ;

z_b, la distance entre Nb et Ns.

Si on pose : $\boldsymbol{N_u + A_s\,\sigma_s = A_{1s}\,\sigma_s}$ et $\boldsymbol{N_u\,e_A = M_{As}}$, les équations précédentes s'écrivent alors :

$\boldsymbol{A_{1s}\,\sigma_s - N_b - A_s'\,\sigma'_s = 0}$ (11.22)

$\boldsymbol{M_{As} - A'_s\,\sigma'_s\,(d - d') - z_b\,N_b = 0}$ (11.23)

Pour une section rectangulaire on a :

$\boldsymbol{N_b = 0{,}81\,\alpha\,b\,d\,f_{bc},\ z_b = (1 - 0{,}416\,\alpha)\,d}$. (11.24)

On peut remarquer que ces nouvelles équations sont celles que l'on obtiendrait pour une section ayant les mêmes dimensions que la section donnée, qui serait soumise à la flexion simple (sous l'action du moment fictif M_{As}) et dont les armatures A_s' et A_{1s} seraient telles que les contraintes dans cette section soient les mêmes que dans la section donnée.

Les valeurs de A_s' et de A_{1s} peuvent être déterminées en calculant (par les méthodes indiquées pour des éléments fléchis) les armatures d'une section dont les dimensions sont connues et qui est soumise, à la flexion simple par le moment fictif $M_{As} = N_u\,e_A$ égal au moment par rapport aux armatures tendues. As' et $A1$s étant connues, on aura pour la section donnée soumise à la flexion composée :

$\boldsymbol{As';\ A_s = A_{1s} - (N_u / \sigma_{su})}$ (11.25)

Par conséquent, pour calculer à la flexion composée une section partiellement comprimée, soumise à un effort normal de compression *Nu* (effort excentré appliqué en *C*), on calculera la section à la flexion simple sous l'effet d'un moment égal au moment de l'effort normal par rapport au centre de gravité des armatures tendues. La valeur des armatures comprimées dans la section étudiée sera égale à la valeur des armatures comprimées ainsi calculées (cette valeur pouvant d'ailleurs être nulle) et la valeur des armatures tendues dans la section étudiée sera égale à la valeur des armatures ainsi calculées, diminuées de $Nu / \sigma s$.

Si l'effort normal *Nu* est un effort de traction, on montrerait, de la même manière que ci-dessus, que l'on a :

$$\boldsymbol{A_s'; A_s = A_{1s} + (N_u / \sigma_{su})} \qquad (11.26)$$

- Si la formule (11.25) conduit pour A_s à une valeur négative (lorsque N_u est un effort de compression), on la prend $A_s = 0$.

- On distingue deux cas suivants :

1) *Si* $A_s = 0$ *et* $A_s' = 0$. Aucune armature n'est théoriquement nécessaire pour armer la section. L'effort normal N_u est alors équilibré par le béton seul, cela signifie, que $N_s = N_s' = 0$ et que N_u est directement opposé à N_b. Comme il est néanmoins indispensable de prévoir dans la section des armatures minimales, on prendra pour $A_s + A_s'$ une valeur au moins égale à la plus grande des deux limites suivantes :

- 4 cm^2 par mètre de longueur de parement mesuré perpendiculairement à la direction des armatures ;

- 0,2 % de *B* (*B* est la section du béton comprimé).

2) *Si* $A_s = 0$ *et* $A_s' \neq 0$. L'effort normal est alors équilibré par le béton comprimé (N_b) et par les armatures comprimées (N_s'), cela signifie que $N_s = 0$. Dans ce cas les équations d'équilibre (11.20) et (11.21) deviennent :

$$\boldsymbol{N_u - N_b - A'_s \sigma_s' = 0} \qquad (11.27)$$

$$\boldsymbol{N_u e_A - A_s' \sigma_s' (d - d') - z_b N_b = 0} \qquad (11.28)$$

On tire $A_s' \sigma_s'$ de la première équation et porte la valeur obtenue dans la deuxième, d'où :

$$\boldsymbol{Nu\ (e_A + d' - d) + N_b (d - d' - z_b) = 0} \qquad (11.29)$$

Cette équation permet de calculer la valeur *y*.

En effet, pour une section rectangulaire, on a :

$N_b = 0{,}8 f_{bc}\, by$, $z_b = d - 0{,}4\, y$

(dans ces équations on a remplacé 0,81 et 0,416 par 0,8 et 0,4 comme pour le cas de la flexion simple) ce qui donne:

$$0{,}4\, y^2 - d'\, y + [Nu\, (e_A + d' - d) / 0{,}8\, f_{bc}\, b] = 0 \quad (11.30)$$

Après avoir déterminé la distance y, par résolution de l'équation (11.30), on calcule :

$$A_s = 0;\; A'_s = \frac{N_u - 0.8 f_{bc}\, by}{\sigma'_{su}} \quad (11.31)$$

(Il faudra néanmoins prévoir des armatures longitudinales tendues comme barres de montage pour maintenir les armatures transversales).

3.2) Calcul à l'ELS

3.2.1) Détermination des contraintes

Une section sera partiellement comprimée si:

- L'effort normal étant un effort de traction, le centre de pression se trouve en dehors de la zone comprise entre les armatures;
- L'effort normal étant un effort de compression on a:

$$M_{G,\, ser} / N_{ser} > I / S\, \upsilon_1 \quad (11.32)$$

Avec :

- $M_{G,\, ser}$, le moment par rapport au centre de gravité G des forces extérieures situées à gauche de la section ;
- N_{ser}, l'effort normal de compression;
- S, l'aire de la section homogène
- I, le moment d'inertie de la section homogène par rapport a l'axe xx' passant par G;
- υ_1, la distance de G a la fibre la moins comprimée (fig. 11.5).

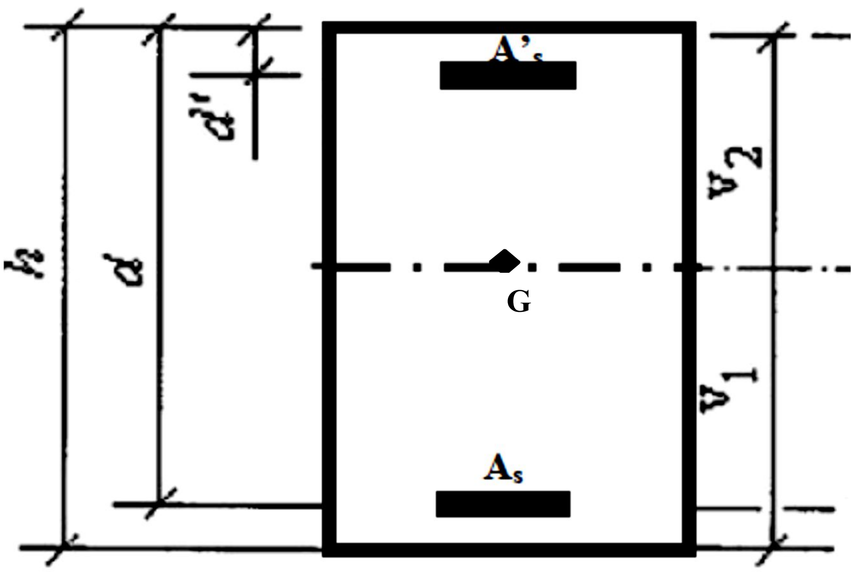


Fig.11.5

Soit "c" est la distance entre le point C et l'arête la plus comprimée de la section. La valeur de "c" sera affectée des signes suivants:

- **Si N_{ser} est un effort de compression (Nser > 0):**
- "c" sera considéré comme positif si C tombe à l'intérieur de la section, c'est-à-dire que $c > 0$ si $e_A < d$ (fig. 11.6, a):
- « c » sera considéré comme négatif si C tombe a l'extérieur de la section, c'est-à-dire que $c < 0$ si $eA > d$ (fig. 11.6, b) ;
- **Si N_{ser} est un effort de traction ($N_{ser} < 0$) :**"c" sera considéré toujours comme positif (fig. 11.6, c).

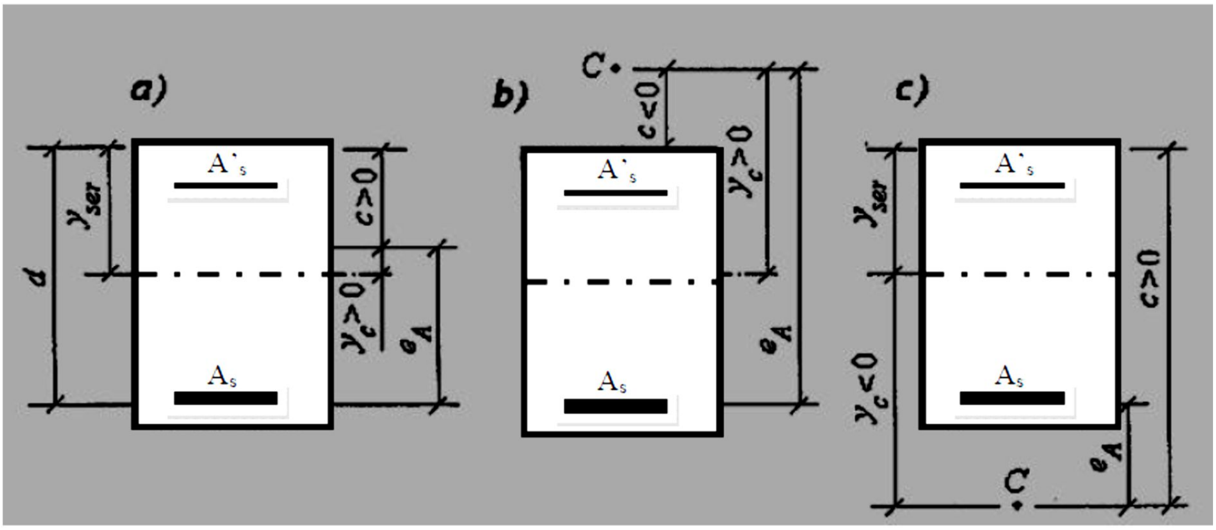


Fig.11.6

Les distances sont: $\mathbf{y_{ser} = y_c + c}$ (c avec son signe) ;

$\mathbf{e_A = M_{ser} / N_{ser} + (d-h/2)}$.

En écrivant le bilan des efforts appliqués a la section, on montre que y_c. est solution de l'équation:

$\mathbf{(y_c)^3 + p\, y_c + q = 0}$. (11.33)

Pour résoudre cette équation on pourra : ou procéder par approximations successives, ou utiliser des abaques. La solution de l'équation (11.33) du troisième degré est obtenue par la méthode suivante : on calcule :

$\mathbf{\Delta = q^2 + (4p^3/27)}$ (11.34)

- <u>Si $\Delta < 0$</u> l'équation a trois racines réelles :

$y_1 = \alpha \cos(\varphi/3)$;

$y_2 = \alpha \cos(\varphi/3 + 120°)$;

$y_3 = \alpha \cos(\varphi/3 + 240°)$.

Avec : $\cos\varphi = (3q/2p)\sqrt{-3/p}$; $\alpha = 2\sqrt{-p/3}$

- Si $\Delta \geq 0$, l'équation n'a qu'une racine réelle, cette racine est positive Si q est négatif, et négative si q est positif. On pose:

$$t = 0.5(\sqrt{\Delta} - q); z = \sqrt[3]{t};\ y_c = z - (p/3z)$$

Les contraintes seront déterminées, comme dans le cas de la flexion simple, par:

$\boldsymbol{\sigma_{bc} = K\, y_{ser}}$ **;**

$\boldsymbol{\sigma_s' = 15\, K\, (y_{ser} - d')}$**;**

$\boldsymbol{\sigma_s = 15\, K\, (d - y_{ser})}$**,**

Avec $\boldsymbol{K = N_{ser}\, y_c / I}$.

Pour une section rectangulaire, les valeurs p, q et I seront données par:

$\boldsymbol{P = -3c^2 - [6\, nA_s'\, (c-d')] / b + [6n\, A_s\, (d-c)]/b}$ **;**

$\boldsymbol{q = -2c^3 - [6nA_s'\, (c-d')^2] / b + [6n\, A_s\, (d-c)^2] / b}$**;**

$\boldsymbol{I = b\, (y_{ser})^3/3 + 15[As\, (d - y_{ser})^2 + A_s'\, (y_{ser} - d')^2]}$**.**

Ou avec $n = 15$:

$\boldsymbol{p = -3c^2 - [90A_s'\, (c - d')] / b + [90A_s\, (d-c)]/b}$**;**

$\boldsymbol{q = -3c3 - [90A_s'\, (c - d')^2] / b + [90A_s\, (d-c)^2]/b}$**.**

Remarque :

Pour une section en T il est nécessaire de savoir si l'axe neutre tombe dans la table ou dans la nervure. Pour cela on considère les deux expressions suivantes dans lesquelles les notations utilisées sont celles définies sur la figure 10.6 et où "c" a la valeur et le signe indiqués ci-dessus :

$\boldsymbol{E_1 = (b - b_o)(3c - 2\, h_o)\, h_0^2 + 90[A_s'\, (c-d')\, d' - A_s(d-c)\, d]}$**;**

$\boldsymbol{E_2 = bh_0^2\, (h_o - 3c) + 90[A_s'\, (c-d')\, (2c - h_o - d') - A_s(d - c)\, (d-h_o)}$**.**

Si E_1 et E_2 sont de signes contraires, l'axe neutre tombe dans la table et on utilisera pour le calcul de p, q et I, les formules données pour la section rectangulaire.

Si E_1 et E_2 sont de même signe, l'axe neutre tombe dans la table et on calculera p, q et I par:

$\boldsymbol{p = -3bc^2 / b_o + 3[(b/b_o) - 1]\, (c-h_o)^2 - [90A_s'(c-d')]/b_o + [90A_s\, (d-c)]/b_o}$**;**

$\boldsymbol{q = -2bc^3 / b_o + 2[(b/b_o) - 1]\, (c-h_o)^3 - [90A_s'(c-d')^2]/b_o - [90A_s\, (d-c)^2]/b_o}$**;**

$\boldsymbol{I = b\, (y_{ser})^3 / 3 - [(b-b_o)\, (y_{ser} - h_o)^3] / 3 + 15A_s'(y_{ser} - d')^2 + 15A_s\, (d - y_{ser})^2}$ **;**

3.2.2) Calcul des armatures

La section est partiellement comprimée. Une section est partiellement comprimée, si:

- le centre de pression C de l'effort normal de traction se trouve en dehors de la zone comprise entre les armatures;

- le centre de pression C de 'effort normal de compression se trouve en dehors de la zone comprise entre les armatures ou bien le centre de pression se trouve entre armatures, mais la condition suivante est satisfaite :

$M_{G,ser} / N_{ser} \geq I / S\, \upsilon$

(Les valeurs de cette formule sont données dans le paragraphe 4.2.1 et sur la figure 11.12).

Au début du calcul, les armatures n'étant pas connues, il n'est pas possible de s'assurer que l'inégalité précédente est satisfaite. On devra donc se contenter d'une approximation et vérifier, par la suite, que la section est bien partiellement comprimée. Par exemple, dans le cas d'une section rectangulaire, pour laquelle on a, en négligeant les armatures, $I/S\upsilon_1 = h/6$, on vérifiera que l'excentricité *"e"* est sensiblement supérieure à $h / 6$.

Soit la figure 11.7 représentant une section rectangulaire partiellement comprimée.

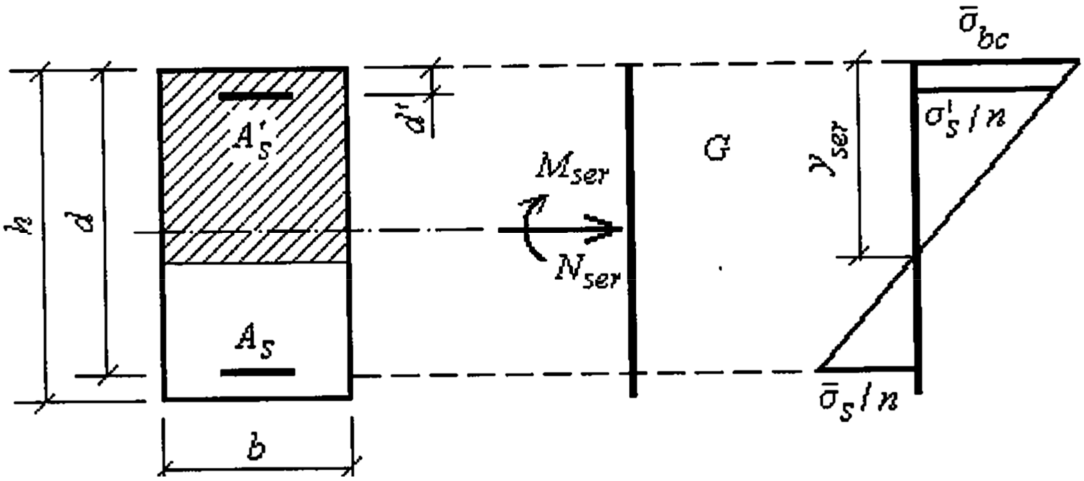


Fig.11.7

Les conditions d'équilibre de la section sont:

$$N_{ser} + A_s\,\bar{\sigma}_s = A_s'\sigma_s + 0{,}5\,\alpha_1\, b\, d\, \bar{\sigma}_{bc}$$

$M_{ser} + N_{ser}\,(d\text{-}h/2) = 0{,}5\,\alpha_1\,(1\text{-}\,\alpha_1)bd^2\,\bar{\sigma}_{bc} + A_s'\,\sigma_s'(d\text{-}d')$. Si on pose

$$A_{s1}\bar{\sigma}_s = N_{ser} + A_s\bar{\sigma}_s;$$

$$M_{As} = M_{ser} + N_{ser}(d - h/2),$$

Alors on aura les mêmes équations que dans une section en flexion simple de moment M_{AS}:

$$A_{S1}\,\sigma_s = A_s\,\sigma_s' + 0{,}5\,\alpha_1 bd\,\bar{\sigma}_{bc}; \quad (11.35)$$

$$M_{As} = 0{,}5\,\alpha_1\,(1 - \alpha_1)bd^2\,\bar{\sigma}_{bc} + A_s'\,\sigma_s'\,(d - d'). \quad (11.36)$$

Alors le calcul de la section s'effectuera en utilisant les résultats de la flexion simple. On calcule:

$$\alpha_1 = 9f_{cj} / (9f_{cj} + \bar{\sigma}_s)$$

$$M_S{}' + M_{AS} - 0,1 f_{cj}\ \alpha_1\ (3 - \alpha_1) b d.$$

- Si $Ms' \leq 0$, il n'y a pas besoin d'armatures comprimées et on recalcule α_1 puis A_{S1} par les formules comme c'est le cas en flexion simple : on commence par calculer le moment réduit μ_1, les coefficients α_1 et β_1 puis la section d'armatures A_{s1} (voir chapitre):

- Si $MS' > 0$, on peut redimensionner la section ou introduire des armatures comprimées et calculer A'_s et A_{s1}

$\sigma'_s = 9f_{c28}\left(1 - \frac{d'}{\alpha_1 d}\right)$; $A'_s = \frac{M_{ser} - 0.1\alpha(3-\alpha_1)bd^2 f_{c28}}{\sigma'_s(d-d')}$;$A_{s1} = \frac{A'_s\sigma'_s - 0.3\alpha_1\, bdf_{c28}}{\overline{\sigma_s}}$

Dans tous les cas on calcule ensuite : $A_s = A_{s1} - (N'_s/\overline{\sigma_s})$

4) Calcul des sections entièrement comprimées

4.1) Calcul à l'ELU

Pour une section entièrement comprimée (les droites de déformation pivotent autour du point *C*) les déformations du béton sont :

- sur la fibre la plus comprimée 2 ‰ ≤ $\varepsilon_{bc} \leq$ 3,5 ‰, donc la contrainte du béton $\sigma_{bc} = f_{bc}$;

- sur la fibre la moins comprimée $0 \leq \varepsilon_{bc} \leq 2$ ‰, donc $\sigma_{bc} \leq f_{bc}$

Pour une section rectangulaire on peut envisager les deux cas extrêmes suivants :

1) L'effort normal est tel que la déformation du béton ε_{bc} sur une fibre extrême la plus comprimée est égale à 3,5 ‰ et est égale à zéro sur une fibre moins comprimée (fig.11.8,*a*). Dans ce cas le calcul à l'aide des formules de la figure 11.10 (voir ci-dessous) donne :

$F_b = 0,81\, f_{bc}\, b\, h$ et l'excentricité d'application de cet effort : $e = 0,084\, h$.

Ici $0,81 = \psi_1$ est le coefficient de remplissage du diagramme parabole- rectangle.

2) L'effort normal est appliqué au centre de gravité de la section, le raccourcissement du béton est égal à 2 ‰ sur toute la hauteur de la section (fig. 11.8,*b*).

Dans ce cas $F_b = F_{bc}\, bh$

Pour une section entièrement comprimée dans laquelle les déformations des fibres extrêmes du béton sont $\varepsilon_{bc} = 3,5$ ‰ et $\varepsilon_{bc} = 0$ on peut rencontrer les cas suivants :

- si $Nu \leq 0{,}81\, f_{bc}\, b\, h$ et $e \leq 0{,}084\, h$, la section est entièrement comprimée, mais l'état-limite ultime n'est pas atteint ; on applique dans ce cas une section minimale d'armature égale à 4 cm^2 par mètre linéaire de parement ;

- si $Nu > 0{,}81\, f_{bc}\, b\, h$ et $e \leq 0{,}084\, h$, la section est entièrement comprimée, l'état-limite ultime est atteint, la section des armatures est prise d'après le calcul;

- si $Nu < 0{,}81\, f_{bc}\, b\, h$ et $e > 0{,}084\, h$, l'état-limite n'est pas atteint, la déformation du béton n'atteignant pas 3,5 ‰, et la résultante des forces de compression dans le béton n'est plus à 0,416 h de la fibre extrême et la valeur $e \neq 0{,}084$.

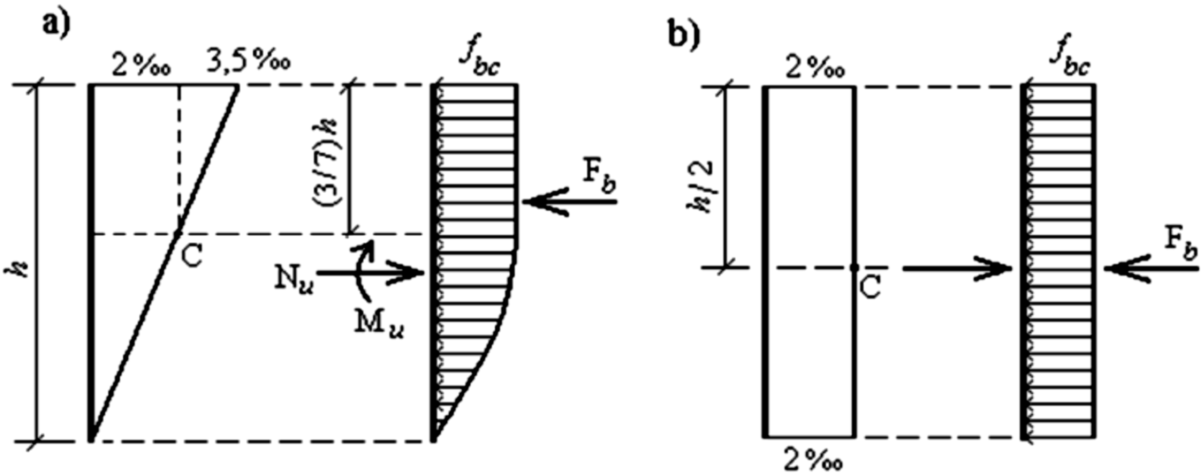


Fig. 11.8

Considérons la section rectangulaire présentée sur la figure 11.9 et supposons que cette section soit entièrement comprimée; dans ce cas le diagramme des déformations passe par le point C et on doit utiliser le diagramme parabole-rectangle. Avec les notations indiquées sur la figure 11.9 et avec les données de la figure 11.10, on trouve (pour la partie rectangulaire de diagramme):

$S_1 = (3h / 7) f_{bc}$; $f_1 = 3h / 14$.

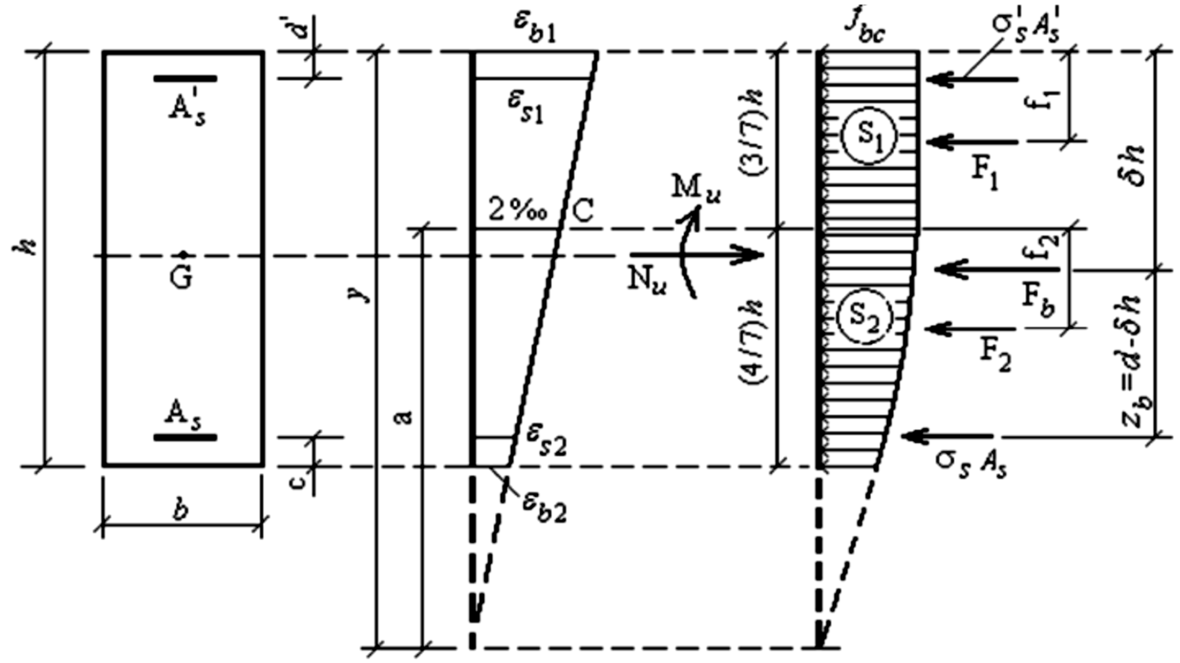
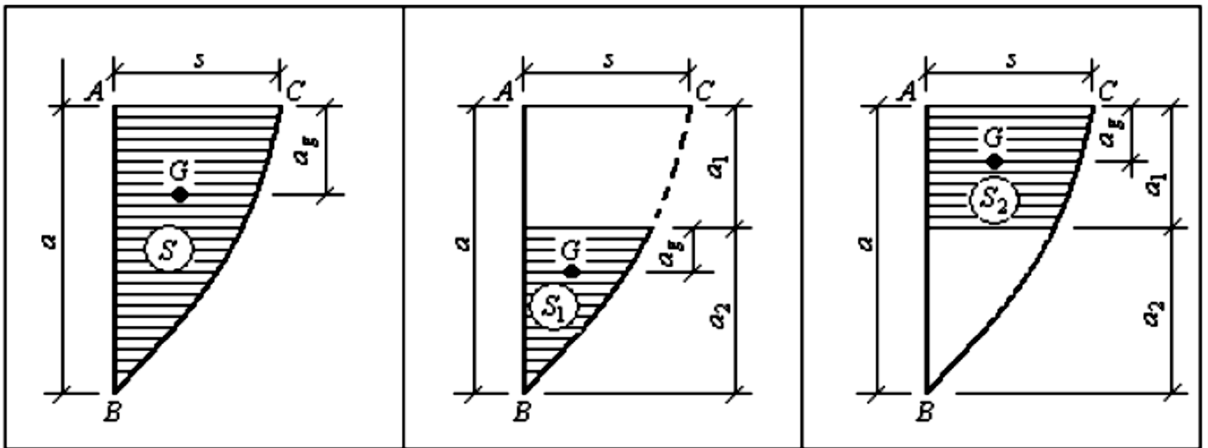


Fig.11.9



$S=\dfrac{2sa}{3}$ $a_g=\dfrac{3a}{8}$	$S_1=\dfrac{s\,a_2^2}{a^2}\left(a-\dfrac{a_2}{3}\right)$ $a_g=\dfrac{a_2(4a-a_2)}{4(3a-a_2)}$	$S_2=s\,a_1\left(1-\dfrac{a_1^2}{3a^2}\right)$ $a_g=\dfrac{3a_1}{4}\left(1-\dfrac{s\,a_1}{3S_2}\right)$

Fig.11.10

D'après les formules données par la figure 11.10, et avec s = f_{bc}, on a (pour la partie curviligne de diagramme) :

$a_1 = 4h/7$, $a = y - (3h/7)$.

Alors:

$$s_2 = sa_1\left[1-\frac{a_1^2}{3a^2}\right] = f_{bc}\frac{4h}{7}\left[1-\frac{16a^2/49}{3[y-(3h/7)]^2}\right] = f_{bc}h\left[\frac{4}{7}-\frac{3.0476}{[(7y/h)-3]^2}\right] ;$$

$$f_2 = \frac{3a_1}{4}\left[1 - \frac{sa_1}{3s_2}\right] = \frac{3}{4}\frac{4h}{7}\left[1 - \frac{f_{bc}4h}{21s_2}\right] = \frac{3h}{7} - \frac{4h^2 f_{bc}}{49s_2}$$

On pose :

$$\psi_1 = 1 - \frac{3.0476}{\left[\left(\frac{7y}{h}\right) - 3\right]^2} = 1 - \chi\,;\, \chi = \frac{3.05}{[(7y/h) - 3]^2}$$

Comme, dans une section entièrement comprimée, y varie de h à ∞. Alors on a :

$0.8095 \leq \psi_1 \leq 1$ (pour simplifier, on prend: $0.81 \leq \psi_1 \leq 1$), et $S_2 = h\, f_{bc}[\psi_1 - 3/7]$

On désigne par :

- F_1, la résultante des forces de compression dans le béton pour la partie rectangulaire du diagramme ;

- F_2, la résultante des forces de compression dans le béton pour la partie parabolique du diagramme ;

- $F_b = F_1 + F_2$, la résultante de compression dans le béton ;

- δh, la distance de F_b à l'arête supérieure de la section. Alors on a:

$$F_1 = bs_1 = (3/7) f_{bc} bh;\; F_2 = bs_2 = [\psi_1 - (3/7)] f_{bc} bh$$

$$F_b = F_1 + F_2 = (3/7) f_{bc} bh + [\psi_1 - (3/7)] f_{bc} bh = \psi_1 f_{bc} bh$$

Le moment des efforts intérieurs par rapport à la fibre la plus comprimée de la section :

$F_b \delta h = F_1 f_1 + F_2[f_2 + (3/7)h]$ **ou encore :**

$$\psi_1 f_{bc} \delta h^2 = (3/7) f_{bc} bh(3h/14) + [\psi_1 - (3/7)] f_{bc} bh \left[\frac{3h}{7} - \frac{4 f_{bc} h^2}{49\left[\psi_1 - \frac{3}{7}\right] f_{bc} h} + \frac{3}{7} h\right]$$

d'où : $\delta = (6/7) - 35/98\psi_1 = 0.8571 - 0.3571/\psi_1$

Le moment de la résultante des forces de compression dans le béton par rapport au centre de gravité des armatures inférieures a pour valeur :

$M_b = - F_b\,(d - \delta\, h) = - \psi_1 f_{bc}\, b\, h\,[d - (0{,}8571 - 0{,}3571 / \psi_1)\, h]$;

$M_b = - [0{,}3571 + (d/h - 0{,}8571)\, \psi_1] f_{bc}\, b\, h^2$ **ou encore :**

$M_b = [d/h - 0{,}5 + \chi\,(6/7 - d/h)]\, f_{bc}\, b\, h^2$, **avec** $\chi = 1 - \psi_1$.

Si on désigne par :

σ_s', la contrainte des armatures les plus comprimées A_s';

σ_s, la contrainte des armatures les moins comprimées A_s ;

M_{As}, le moment, par rapport au centre de gravité des armatures inférieures, provoqué par des forces extérieures situées à gauche de la section. Avec ces notations on peut écrire :

$\boldsymbol{N_u - F_1 - F_2 - A_s' \sigma_s' - A_s \sigma_s = 0}$, Ou encore

$$N_u - \psi_1 f_{bc}\, b\, h - A_s' \sigma_s' - A_s\sigma_s = 0 \; ; \qquad (11.37)$$

$$M_{As} + M_b - A_s'\sigma_s' (d - d') = M_{As} - [0{,}3571 + (d/h - 0{,}8571)\ \psi_1] f_{bc}\, b\, h^2 - A_s' \sigma_s' (d - d') = 0 \; ;$$

On suppose que les armatures sont constituées par des aciers dont le diagramme des déformations présente un palier et qu'on se trouve dans le cas où $\sigma_s' = \sigma_s$.

Il est intéressant, au point de vue économique, de rechercher pour A_s' et A_s des valeurs telles que la somme $A_s' + A_s$ ou encore $(A_s' + A_s)\, \sigma_s$, est minimale. La projection des efforts sur l'axe longitudinal donne : $(A_s'\sigma_s' + A_s\sigma_s) = N_u - \psi_1 f_{bc}\, b\, h$. Alors, la partie droite sera minimale lorsque $\psi 1$ sera maximal, donc pour $\psi 1 = 1$, ce qui correspond à $y = \infty$.

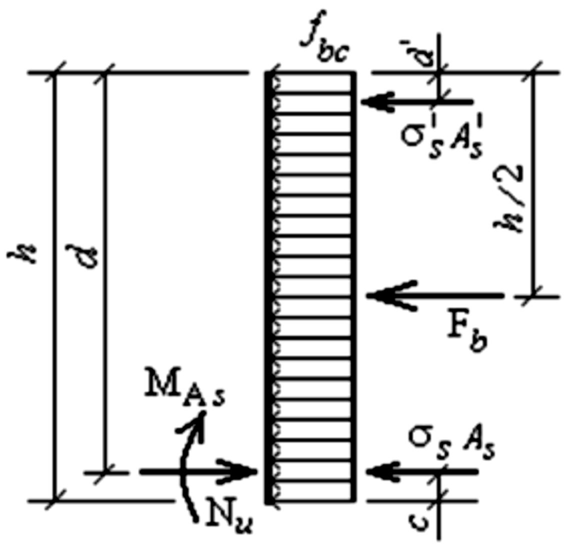


Fig.11.11

On admet, à titre d'approximation, que ce résultat est également valable pour les aciers de type 2. Si $y = \infty$ toutes les fibres de la section ont un raccourcissement égal à 2%o

Soit σ_{s2} la contrainte pour le raccourcissement de 2%o.

Avec $\psi_1 = 1\ (\chi = 0)$, les contraintes $\sigma'_s = \sigma_s = \sigma_{s2}$, alors les équations de ΣN et de ΣM seront :

$$N_u - f_{bc} bh - A_s' \sigma_{s2} - A_s \sigma_{s2} = 0 \qquad (11.39)$$

$$M_{As} - (d - 0{,}5h) f_{bc}\, bh - A'_s\, \sigma_{s2}\, (d - d') = 0. \qquad (11.40)$$

De ces deux équations on tire :

$$A'_s = \frac{M_{As} - (d - 0.5h) f_{bc} bh}{(d - d')\sigma_{s2}} \tag{11.41}$$

$$A_s = \frac{N_u - f_{bc} bh}{\sigma_{s2}} - A'_s \tag{11.42}$$

Pour que les résultats obtenus aient un sens il faut que l'on ait $As' \geq 0$ et $As \geq 0$. Vu que A'_s, la section des armatures situées du côté le plus comprimé est supérieure à A_s, il suffit donc de chercher la condition pour que l'on ait $As \geq 0$. Cette condition s'écrit (d'après les formules 11.41 et 11.42) :

$$A_s = \frac{N_u - f_{bc} bh}{\sigma_{s2}} - \frac{M_{As} - (d - 0.5h) f_{bc} bh}{\left(d - d'\right)\sigma_{s2}} \geq 0$$

Soit :

$$N_u\,(d - d') - M_{As} \geq (0{,}5\,h - d')\,f_{bc}\,b\,h \tag{11.43}$$

Donc si cette condition est satisfaite, c'est-à-dire qu'on a besoin des armatures As' et As, on calcule les sections des armatures par les formules 11.41 et 11.42.

Si on suppose que la condition (11.43) n'est pas remplie, c'est-à- dire que l'on ait :

$\boldsymbol{Nu\,(d - d') - M_{As} < (0{,}5\,h - d')\,f_{bc}\,b\,h.}$

Il en résulterait $As < 0$, c'est-à-dire que l'armature As est inutile. Dans ce cas on prend $As = 0$, alors les conditions de la résistance (11.37) et (11.38) seront :

$\boldsymbol{Nu - \psi_1 f_{bc}\,b\,h - A_s'\,\sigma_s' = 0;}$

$\boldsymbol{M_{As} - [0,3571 + (d/h - 0,8571)\,\psi 1]\,f_{bc}\,b\,h^2 - A_s'\,\sigma_s'\,(d - d') = 0.}$

En éliminant $A_s'\,\sigma_s'$ entre les deux équations, on obtient :

$$\psi_1 = \frac{0.3571 + [N_u(d - d') - M_{As}]/f_{bc}bh^2}{0.8571 - (d'/h)} \tag{11.44}$$

On a déjà montré que pour qu'une section rectangulaire qui est entièrement comprimée, on devait avoir: $0.81 \leq \psi_1 \leq 10{,}81$ ou encore :

$$0.81 \leq \frac{0.3571 + \dfrac{\left[N_u\left(d - d'\right) - M_{As}\right]}{f_{bc}bh^2}}{0.8571 - \left(\dfrac{d'}{h}\right)} \leq 1.0$$

Ce qui donne : **(0,337 *h* - 0,81 *d'*) f_{bc} *b h* ≤ N_u (*d* - *d'*) – M_{As} ≤ (0,5 *h* - *d'*) f_{bc} *b h*.** (11.45)

Cette condition caractérise le travail de la section :

- la section est entièrement comprimée, lorsque :

$$(0{,}337\,h - 0{,}81\,d')\,f_{bc}\,b\,h \le N_u\,(d - d') - M_{As}. \tag{11.46}$$

- on n'a pas besoin d'armature moins comprimée (As < 0), lorsque :

$$Nu\,(d - d') - M_{As} \le (0{,}5\,h - d')\,f_{bc}\,b\,h. \tag{11.47}$$

Pour les armatures supérieures la contrainte σs' est déterminée en considérant les triangles semblables sur la figure 11.9, ce qui donne :

$$\frac{1000\varepsilon_s'}{2} = \frac{y - d'}{y - (3h/7)}$$

Soit :

$$1000\ \varepsilon_s' = 2\,(y - d') / [y - (3\,h / 7)]$$

Comme :

$$\psi_1 = 1 - \frac{3.0476}{[(7y/h)-3]^2} \text{ et } y = \frac{h}{7}\left[3 + \frac{1.7457}{\sqrt{1-\psi_1}}\right]$$

Alors on trouve :

$$1000\varepsilon_s' = 2 + (3.437 - 8.019d'/h)\sqrt{1-\psi_1} \tag{11.48}$$

Après avoir déterminé ε_s', on déduit σ_s' d'après le diagramme des déformations et on calcule l'armature A_s' (armature As = 0) :

$$A_s' = \frac{N_u - \psi_1 f_{bc} bh}{\sigma_s'}\ ;\ A_s = 0 \tag{11.49}$$

Donc, si la condition (11.46) est satisfaite (c'est-à-dire qu'une section de l'élément est entièrement comprimée, mais la section des armatures situées du côté le moins comprimé (*As* = 0), on détermine le coefficient Ψ_1 (formule 10.44), ensuite la déformation de l'acier 1000

ε'_s (formule 10.48) et la contrainte des armatures σ'_s et définitivement on calcule la section des armatures *As'* (formule 11.49).

4.2) Calcul a l'ELS

4.2.1) Détermination des contraintes

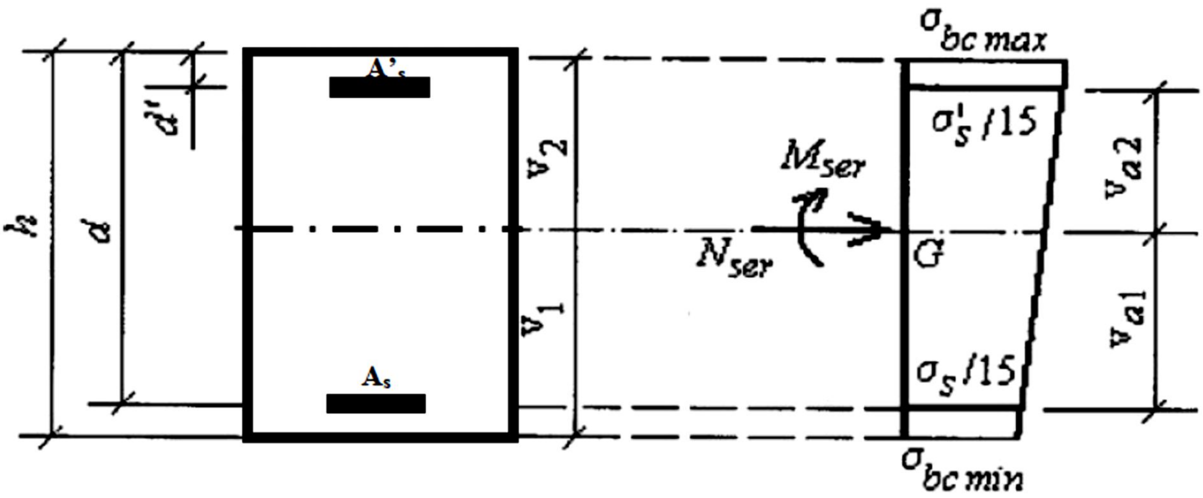


Fig.11.12

Pour qu'une section soit entièrement comprimée il faut que l'effort normal soit un effort de compression et que l'on ait, avec les notations définies ci-dessus : $M_{G\,ser}/ N_{ser} \leq I /S\upsilon_1$.

Au début du calcul, les armatures n'étant pas connues, il n'est pas possible de s'assurer que l'inégalité précédente est satisfaite. On devra donc se contenter d'une approximation et vérifier, par la suite, que la section est bien partiellement comprimée. Par exemple, dans le cas d'une section rectangulaire, pour laquelle on a, en négligeant les armatures, $I/S\upsilon_1 = h/6$, on vérifiera que l'excentricité *"e"* est sensiblement inférieure à $h / 6$.

Avec les notations indiquées sur la figure 10.12, on a :

$\sigma_{bc\ max}= N_{ser} /S + M_{ser} v_2/I$ (11.50)

$\sigma_{bc\ mIn} = N_{ser} /S – M_{Ser}\, v_1/I$. (11.51)

On doit vérifier la condition $\sigma_{bc\ max} \leq 0,6 f_{c28}$.

Pour que la section soit entièrement comprimée, il faut que $\sigma_{bc\ min} \geq 0$.

Les contraintes des armatures seront déterminées à l'aide des formules suivantes :

$\sigma'_s = 15 [N_{ser} /S + M_{ser} (v_2 - d')/I]$ (11.52)

$\sigma_s = 15 [N_{ser}/S + M_{ser} (d – v_1) / I]$ (11.53)

Pour une section rectangulaire on a (fig. 11.13, a):

$S = b\, h + 15 (A'_s + A_S)$ (11.54)

$v_2 = (1 /S) [(bh^2 / 2) + 15 (A'_s\, d'+ A_s\, d)],\ v_1 =h - v_2,$ (11.55)

$I = [b (v_1^3 + v_2^3)]/3 + 15 [A_s' (v_2 - d')^2 + A_s (d- v_2)^2]$ (11.56)

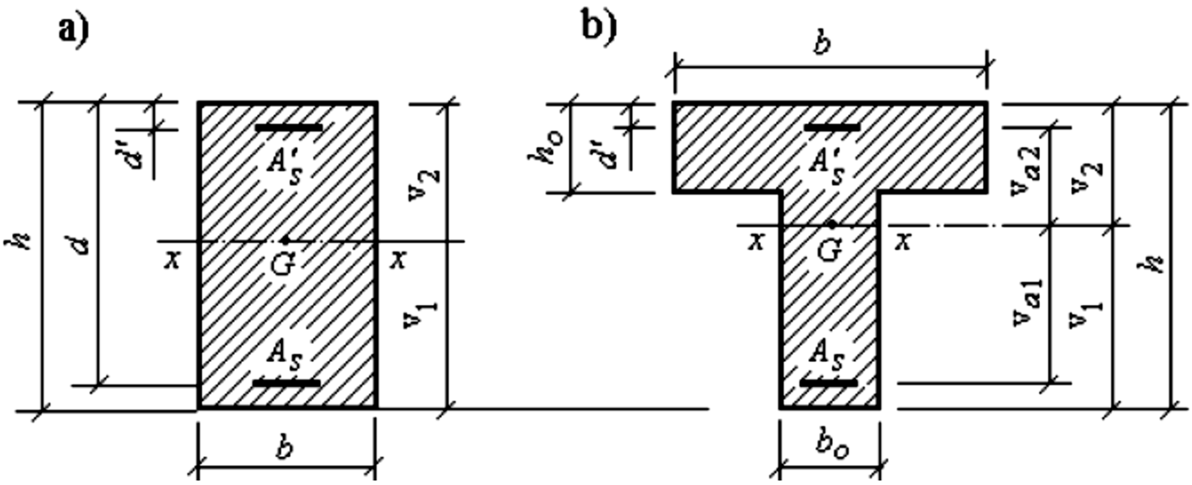


Fig.11.13

Donc pour une section entièrement comprimée on prend le moment d'inertie de la section totale homogène.

Pour une section en T, avec les notations indiquées sur la figure 11.13, b, on a:

$S = b_o h + (b - b_o) h_o + 15(A_s' + A_s);$

$v_2 = 1 / S [b_o h^2/2 + (b-b_o) h^2 /2 + 15(A_s' d' + A_s d);$

$v_1 = h - v_2;$

$I = [b_o (v_1^3 + v_2^3)] /3 + (b - b_o) h_o [h_o^2 / 12 + (v_2 - h_o/2)^2] + 15 [A'_S (v_2 - d')^2 + A_s (d - v_2)^2].$

4.2.2) Détermination des armatures

La section est entièrement comprime. Une section sera entièrement comprimée si l'effort normal est un effort de compression et si l'on a: $M_{G,ser}/N_{ser} < I/S\ v_1,$

La valeur I/Sv_1 ne pouvant être déterminée au début du calcul, il n'est pas possible de s'assurer que l'inégalité précédente est satisfaite. On devra donc se contenter d'une approximation et vérifier, par la suite, que la section est bien partiellement comprimée. Par exemple, dans le cas d'une section rectangulaire, pour laquelle on a, en négligeant les armatures, $I/S\upsilon_1 = h/6$, on vérifiera que l'excentricité *"e"* est sensiblement inférieure à $h / 6$.

Si la condition $\sigma_{bcmax} \leq \overline{\sigma_{bc}}$ on modifiera les valeurs initiales de *A's* et de *As* et on recommencera les calculs.

On écrit les conditions d'équilibres et on choisit généralement de faire travailler le béton au maximum (donc avec $\overline{\sigma_{bc}}$), et on à alors.

$$N_{ser} = bh\bar{\sigma}_{bc} + (A_s + A_s')n\bar{\sigma}_{bc}$$

$$M_{ser} + N_{ser}\ (d-h/2) = bh\bar{\sigma}_{bc}\ (d-h/2) + n\ \bar{\sigma}_{bc}\ A_s'(d-d')$$

D' où on trouve la section des armatures:

$$A'_s = \frac{M_{ser} + (N_{ser} - bh\overline{\sigma_{bc}})\left(d - \frac{h}{2}\right)}{15\overline{\sigma_{bc}}(d - d')} \tag{11.57}$$

$$A_s = \frac{N_{ser} - bh\overline{\sigma_{bc}}}{15\overline{\sigma_{bc}}} - A'_s \tag{11.58}$$

II faut noter que dans le cas fréquent des sections rectangulaires afin d'éviter les calculs précédents, on peut utiliser des abaques.