

## Partiel de Thermodynamique et Physique Statistique

Mercredi 30 Mars 2011

durée : 3 heures

*Sac et trousse au fond de la salle. Calculatrices interdites.*

*La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note.*

*Compte-tenu de la longueur du sujet, le barème sera sur plus de 20 points.*

*Il y a deux problèmes indépendants. De nombreuses parties et questions sont indépendantes.*

### Désintégrations radioactives

#### Question de cours

La loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  (réel) donne la probabilité d'avoir  $n$  évènements rares selon

$$P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

1. Montrer que  $P(n)$  est bien normalisée, puis calculer la valeur moyenne de  $n$  et son écart-type.  
*N.-B. : on pourra calculer  $\langle n(n-1) \rangle$ .*
2. On sait que des évènements, distribués selon une loi de Poisson, se produisent en moyenne avec une fréquence  $c$ . Donner l'expression de  $\lambda$  en fonction de  $c$  et du temps d'observation  $T$ .

#### Source radioactive

On considère un matériau contenant  $N$  atomes radioactifs. Chacun a une probabilité  $p = dt/\tau$  de se désintégrer dans un intervalle de temps élémentaire  $dt$ , avec  $\tau$  le temps de vie du radioélément.

**Décroissance radioactive.** Dans cette question, on étudie l'évolution du nombre d'atomes radioactifs avec le temps.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait  $n$  désintégrations parmi  $N$  atomes entre  $t$  et  $t + dt$  ?
2. Calculer la valeur moyenne de  $n$  en fonction de  $N$ ,  $dt$  et  $\tau$ .  
*N.-B. : si besoin, on pourra introduire la fonction  $f(x) = (px + 1 - p)^N$  pour faire ce calcul.*
3. En déduire que la population d'atomes vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N(t)}{\tau}.$$

4. Résoudre cette équation en notant  $N_0$  la population initiale d'atomes radioactifs.

**Compteur Geiger.** On considère maintenant une fenêtre de temps  $T \ll \tau$  telle que le nombre  $N$  d'atomes puisse être considéré comme à peu près constant. Un compteur Geiger détecte chacune des désintégrations en émettant un signal sonore ("coups"). On note  $n$  le nombre de coups observés pendant  $T$  et on suppose qu'on a  $n \ll N$ .

1. Justifier que, lors de la mesure, la probabilité de mesurer  $n$  "coups" suit une loi de Poisson dont on exprimera le paramètre en fonction de  $N$ ,  $T$  et  $\tau$ .
2. On appelle *activité* d'une source radioactive le nombre de désintégrations par seconde (unité : le Becquerel). Montrer que le compteur Geiger permet de mesurer cette activité.
3. Proposer un protocole expérimental permettant de mesurer  $\tau$  et utilisant un compteur Geiger.
4. Proposer un protocole expérimental permettant de déterminer la contamination d'un objet par un radioélément dont on connaît  $\tau$ , en utilisant un compteur Geiger.

**Probabilité de survie.** On va retrouver ici la loi  $N(t)$  obtenue dans le deuxième paragraphe par une autre méthode.

1. On considère un seul atome non désintégré à  $t = 0$ . Quelle est la probabilité pour qu'il se désintègre entre le temps  $t$  et  $t + dt$ ? Vérifier que cette probabilité est bien normalisée.  
*N.-B. : on pourra discrétiser l'intervalle de temps  $[0, t]$  en  $M$  intervalles élémentaires.*
2. En déduire la probabilité que l'atome "survive" jusqu'au temps  $t$ .  
En déduire  $N(t)$  en considérant des atomes indépendants.
3. Calculer la durée de vie moyenne d'un atome (son "espérance de vie").  
Évaluer la probabilité qu'il vive deux fois plus longtemps que cette durée.

## Modèle simple de sublimation utilisant la description microcanonique

La sublimation est le passage de la phase solide à la phase gazeuse d'un corps pur. L'équilibre correspondant à la coexistence de ces phases est une courbe dans le plan  $(P, T)$  que nous allons chercher à déterminer à partir d'un modèle simple. Pour cela, nous modélisons dans un premier temps la phase gazeuse, puis la phase solide avant de considérer l'équilibre des deux phases.

### Préambule

Nous montrons ici que pour calculer l'entropie microcanonique d'un système classique, il suffit de connaître la fonction  $\phi(E, N, V)$  qui donne le nombre de micro-états accessibles d'énergie inférieure ou égale à  $E$  pour  $N$  et  $V$  donnés.

1. À quelle situation physique correspond la description microcanonique?
2. Rappeler la formule de Boltzmann donnant l'entropie microcanonique en fonction du nombre de micro-états  $\Omega(E, V, N)$  accessibles entre  $E$  et  $E + \delta E$  avec  $\delta E$  une fenêtre en énergie négligeable devant  $E$ .
3. Exprimer  $\Omega(E, V, N)$  à l'aide de la fonction  $\phi(E, N, V)$ .
4. De manière générale, on s'attend à ce que le comportement de  $\phi(E, N, V)$  soit le suivant :

$$\phi(E, N, V) \propto \left( \frac{E}{N \varepsilon_0} \right)^{\alpha N},$$

avec  $\varepsilon_0$  une énergie typique microscopique et  $\alpha$  un coefficient numérique de l'ordre de l'unité.  
 Quel est l'ordre de grandeur de  $N$  ?  
 Justifier que l'on peut écrire

$$S(E, V, N) \simeq k_B \ln \phi(E, V, N),$$

formule que l'on utilisera par la suite

## Potentiel chimique de la phase gaz

Notre but est d'établir la relation entre le potentiel chimique  $\mu$  de la phase gaz en fonction de sa température  $T$ , du nombre de particules  $N$  et de son volume  $V$ . On considère que les particules sont toutes identiques de masse  $m$  et sans interaction.

1. Qu'est-ce qu'un micro-état de ce système ? Quel est l'espace des phases et sa dimension ?
2. Écrire l'Hamiltonien  $\mathcal{H}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N; \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$  du système.
3. Justifier l'origine et les différents termes de la formule

$$\phi(E, V, N) = \frac{\mathcal{V}(E, V, N)}{N! h^{3N}},$$

où  $\mathcal{V}(E, V, N)$  est le volume de l'espace des phases occupé par les micro-états d'énergies  $\leq E$  :

$$\mathcal{V}(E, V, N) = \int \cdots \int_{\mathcal{H}(\vec{q}_1, \dots, \vec{p}_N) \leq E} d\vec{q}_1 \cdots d\vec{p}_N.$$

4. Exprimer  $\mathcal{V}(E, V, N)$  en faisant intervenir le volume d'une sphère dont on précisera le rayon et la dimension de l'espace. En déduire l'expression de  $\phi(E, V, N)$  à l'aide du formulaire.
5. En déduire que l'entropie de la phase gaz en fonction des variables  $(E, V, N)$  s'écrit :

$$S(E, V, N) = N k_B \left\{ \ln \left[ \frac{V}{N} \left( \frac{4\pi m E}{3h^2 N} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{5}{2} \right\}.$$

6. Calculer la température  $T$ , la pression  $P$  et le potentiel chimique  $\mu_g$  en fonction des variables  $(E, V, N)$ .
7. Montrer que l'on peut écrire  $\mu_g = -k_B T \ln \left( \frac{V}{N \lambda_T^3} \right)$ , avec  $\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$ .

## Potentiel chimique de la phase solide

On modélise la phase solide par un cristal constitué de  $M$  particules situées sur les nœuds d'un réseau et pouvant vibrer autour de leur position d'équilibre. Les particules gagnent une énergie de liaison  $\Delta > 0$  lorsqu'elles sont dans le cristal. L'Hamiltonien peut donc s'écrire :

$$\mathcal{H}(\vec{q}_1, \vec{p}_1, \dots, \vec{q}_M, \vec{p}_M) = \sum_{i=1}^M \left( \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{q}_i^2 - \Delta \right),$$

avec  $\omega$  la fréquence typique de vibration. On notera  $E$  l'énergie totale.

1. Justifier les différents termes dans la formule :

$$\phi(E, M) = \frac{1}{h^{3M}} \int \cdots \int_{\mathcal{H}(\vec{q}_1, \dots, \vec{p}_M) \leq E} d\vec{q}_1 \cdots d\vec{p}_M .$$

2. Après avoir exprimé  $\phi(E, M)$  en fonction du volume d'une sphère dont on précisera la dimension de l'espace et le rayon, calculer  $\phi(E, M)$ .
3. Montrer que l'entropie microcanonique prend la forme :

$$S(E, M) = 3Mk_B \left\{ \ln \left( \frac{E + M\Delta}{3M\hbar\omega} \right) + 1 \right\} ,$$

où  $\hbar = h/2\pi$ .

4. Calculer la température  $T$  et le potentiel chimique  $\mu_s$  de la phase solide. Montrer que ce dernier peut se mettre sous la forme

$$\mu_s = -\Delta + 3k_B T \ln \frac{T_s}{T} ,$$

où  $T_s$  est une température caractéristique du solide dont on donnera l'expression en fonction des données du problème.

## Équilibre entre les deux phases

On étudie enfin la situation d'équilibre entre les deux phases. On considère l'ensemble {gaz+solide} isolé. Les deux phases peuvent naturellement échanger des particules et donc de l'énergie. On va retrouver ici les conditions d'équilibre entre les deux phases. On utilise les indices 1 et 2 pour chacune des phases en présence.

1. Que peut-on dire de l'énergie totale  $E = E_1 + E_2$  et du nombre de particules  $N = N_1 + N_2$  ?
2. On note  $\Omega_k(E_k, N_k)$  le nombre de micro-états accessibles d'énergie  $E_k$  correspondant à un nombre de particules  $N_k$  pour  $k = 1, 2$ . Quelle est la probabilité d'avoir une énergie  $E_1$  et un nombre de particule  $N_1$  dans 1 ?
3. Réexprimer cette probabilité à l'aide de l'entropie totale  $S = S_1 + S_2$ . Que se passe-t-il à l'équilibre ?
4. En déduire d'abord l'égalité des températures  $T_1 = T_2 \equiv T$ , puis celle des potentiels chimiques  $\mu_1 = \mu_2 \equiv \mu$ .
5. Exprimer alors la pression  $P$  de la phase gaz en équilibre avec la phase solide en fonction de  $T$  et des données du problème. Tracer la courbe  $P(T)$  et donner ses principales caractéristiques.
6. Le modèle vous semble-t-il justifié pour les hautes températures ? À quelles températures cela correspond-il ?

## Formulaire

- Volume d'une sphère de rayon  $R$  dans un espace de dimension  $D$  :  $V_D(R) = \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} R^D$ .
- Formules de Stirling :  $\ln N! \simeq N \ln N - N$  et  $\ln \Gamma(x+1) \simeq x \ln x - x$ .

# Fin.