

Partiel de Thermodynamique et Physique Statistique

Mercredi 30 Mars 2011

durée : 3 heures

Sac et trousse au fond de la salle. Calculatrices interdites.

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note.

Compte-tenu de la longueur du sujet, le barème sera sur plus de 20 points.

Il y a deux problèmes indépendants. De nombreuses parties et questions sont indépendantes.

Désintégrations radioactives

Question de cours

La loi de Poisson de paramètre λ (réel) donne la probabilité d'avoir n évènements rares selon

$$P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} .$$

1. Montrer que $P(n)$ est bien normalisée, puis calculer la valeur moyenne de n et son écart-type.
N.-B. : on pourra calculer $\langle n(n-1) \rangle$.
2. On sait que des évènements, distribués selon une loi de Poisson, se produisent en moyenne avec une fréquence c . Donner l'expression de λ en fonction de c et du temps d'observation T .

Source radioactive

On considère un matériau contenant N atomes radioactifs. Chacun a une probabilité $p = dt/\tau$ de se désintégrer dans un intervalle de temps élémentaire dt , avec τ le temps de vie du radioélément.

Décroissance radioactive. Dans cette question, on étudie l'évolution du nombre d'atomes radioactifs avec le temps.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait n désintégrations parmi N atomes entre t et $t + dt$?
2. Calculer la valeur moyenne de n en fonction de N , dt et τ .
N.-B. : si besoin, on pourra introduire la fonction $f(x) = (px + 1 - p)^N$ pour faire ce calcul.
3. En déduire que la population d'atomes vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N(t)}{\tau} .$$

4. Résoudre cette équation en notant N_0 la population initiale d'atomes radioactifs.

Compteur Geiger. On considère maintenant une fenêtre de temps $T \ll \tau$ telle que le nombre N d'atomes puisse être considéré comme à peu près constant. Un compteur Geiger détecte chacune des désintégrations en émettant un signal sonore ("coups"). On note n le nombre de coups observés pendant T et on suppose qu'on a $n \ll N$.

1. Justifier que, lors de la mesure, la probabilité de mesurer n "coups" suit une loi de Poisson dont on exprimera le paramètre en fonction de N , T et τ .
2. On appelle *activité* d'une source radioactive le nombre de désintégrations par seconde (unité : le Becquerel). Montrer que le compteur Geiger permet de mesurer cette activité.
3. Proposer un protocole expérimental permettant de mesurer τ et utilisant un compteur Geiger.
4. Proposer un protocole expérimental permettant de déterminer la contamination d'un objet par un radioélément dont on connaît τ , en utilisant un compteur Geiger.

Probabilité de survie. On va retrouver ici la loi $N(t)$ obtenue dans le deuxième paragraphe par une autre méthode.

1. On considère un seul atome non désintégré à $t = 0$. Quelle est la probabilité pour qu'il se désintègre entre le temps t et $t + dt$? Vérifier que cette probabilité est bien normalisée.
N.-B. : on pourra discrétiser l'intervalle de temps $[0, t]$ en M intervalles élémentaires.
2. En déduire la probabilité que l'atome "survive" jusqu'au temps t .
En déduire $N(t)$ en considérant des atomes indépendants.
3. Calculer la durée de vie moyenne d'un atome (son "espérance de vie").
Évaluer la probabilité qu'il vive deux fois plus longtemps que cette durée.

Modèle simple de sublimation utilisant la description microcanonique

La sublimation est le passage de la phase solide à la phase gazeuse d'un corps pur. L'équilibre correspondant à la coexistence de ces phases est une courbe dans le plan (P, T) que nous allons chercher à déterminer à partir d'un modèle simple. Pour cela, nous modélisons dans un premier temps la phase gazeuse, puis la phase solide avant de considérer l'équilibre des deux phases.

Préambule

Nous montrons ici que pour calculer l'entropie microcanonique d'un système classique, il suffit de connaître la fonction $\phi(E, N, V)$ qui donne le nombre de micro-états accessibles d'énergie inférieure ou égale à E pour N et V donnés.

1. À quelle situation physique correspond la description microcanonique?
2. Rappeler la formule de Boltzmann donnant l'entropie microcanonique en fonction du nombre de micro-états $\Omega(E, V, N)$ accessibles entre E et $E + \delta E$ avec δE une fenêtre en énergie négligeable devant E .
3. Exprimer $\Omega(E, V, N)$ à l'aide de la fonction $\phi(E, N, V)$.
4. De manière générale, on s'attend à ce que le comportement de $\phi(E, N, V)$ soit le suivant :

$$\phi(E, N, V) \propto \left(\frac{E}{N\varepsilon_0} \right)^{\alpha N},$$

avec ε_0 une énergie typique microscopique et α un coefficient numérique de l'ordre de l'unité. Quel est l'ordre de grandeur de N ? Justifier que l'on peut écrire

$$S(E, V, N) \simeq k_B \ln \phi(E, V, N),$$

formule que l'on utilisera par la suite

Potentiel chimique de la phase gaz

Notre but est d'établir la relation entre le potentiel chimique μ de la phase gaz en fonction de sa température T , du nombre de particules N et de son volume V . On considère que les particules sont toutes identiques de masse m et sans interaction.

1. Qu'est-ce qu'un micro-état de ce système? Quel est l'espace des phases et sa dimension?
2. Écrire l'Hamiltonien $\mathcal{H}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N; \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$ du système.
3. Justifier l'origine et les différents termes de la formule

$$\phi(E, V, N) = \frac{\mathcal{V}(E, V, N)}{N! h^{3N}},$$

où $\mathcal{V}(E, V, N)$ est le volume de l'espace des phases occupé par les micro-états d'énergies $\leq E$:

$$\mathcal{V}(E, V, N) = \int \cdots \int_{\mathcal{H}(\vec{q}_1, \dots, \vec{p}_N) \leq E} d\vec{q}_1 \cdots d\vec{p}_N.$$

4. Exprimer $\mathcal{V}(E, V, N)$ en faisant intervenir le volume d'une sphère dont on précisera le rayon et la dimension de l'espace. En déduire l'expression de $\phi(E, V, N)$ à l'aide du formulaire.
5. En déduire que l'entropie de la phase gaz en fonction des variables (E, V, N) s'écrit :

$$S(E, V, N) = N k_B \left\{ \ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m E}{3h^2 N} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{5}{2} \right\}.$$

6. Calculer la température T , la pression P et le potentiel chimique μ_g en fonction des variables (E, V, N) .
7. Montrer que l'on peut écrire $\mu_g = -k_B T \ln \left(\frac{V}{N \lambda_T^3} \right)$, avec $\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$.

Potentiel chimique de la phase solide

On modélise la phase solide par un cristal constitué de M particules situées sur les nœuds d'un réseau et pouvant vibrer autour de leur position d'équilibre. Les particules gagnent une énergie de liaison $\Delta > 0$ lorsqu'elles sont dans le cristal. L'Hamiltonien peut donc s'écrire :

$$\mathcal{H}(\vec{q}_1, \vec{p}_1, \dots, \vec{q}_M, \vec{p}_M) = \sum_{i=1}^M \left(\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{q}_i^2 - \Delta \right),$$

avec ω la fréquence typique de vibration. On notera E l'énergie totale.

1. Justifier les différents termes dans la formule :

$$\phi(E, M) = \frac{1}{h^{3M}} \int \cdots \int_{\mathcal{H}(\vec{q}_1, \dots, \vec{p}_M) \leq E} d\vec{q}_1 \cdots d\vec{p}_M.$$

2. Après avoir exprimé $\phi(E, M)$ en fonction du volume d'une sphère dont on précisera la dimension de l'espace et le rayon, calculer $\phi(E, M)$.
3. Montrer que l'entropie microcanonique prend la forme :

$$S(E, M) = 3Mk_B \left\{ \ln \left(\frac{E + M\Delta}{3M\hbar\omega} \right) + 1 \right\},$$

où $\hbar = h/2\pi$.

4. Calculer la température T et le potentiel chimique μ_s de la phase solide. Montrer que ce dernier peut se mettre sous la forme

$$\mu_s = -\Delta + 3k_B T \ln \frac{T_s}{T},$$

où T_s est une température caractéristique du solide dont on donnera l'expression en fonction des données du problème.

Équilibre entre les deux phases

On étudie enfin la situation d'équilibre entre les deux phases. On considère l'ensemble {gaz+solide} isolé. Les deux phases peuvent naturellement échanger des particules et donc de l'énergie. On va retrouver ici les conditions d'équilibre entre les deux phases. On utilise les indices 1 et 2 pour chacune des phases en présence.

1. Que peut-on dire de l'énergie totale $E = E_1 + E_2$ et du nombre de particules $N = N_1 + N_2$?
2. On note $\Omega_k(E_k, N_k)$ le nombre de micro-états accessibles d'énergie E_k correspondant à un nombre de particules N_k pour $k = 1, 2$. Quelle est la probabilité d'avoir une énergie E_1 et un nombre de particule N_1 dans 1 ?
3. Réexprimer cette probabilité à l'aide de l'entropie totale $S = S_1 + S_2$. Que se passe-t-il à l'équilibre ?
4. En déduire d'abord l'égalité des températures $T_1 = T_2 \equiv T$, puis celle des potentiels chimiques $\mu_1 = \mu_2 \equiv \mu$.
5. Exprimer alors la pression P de la phase gaz en équilibre avec la phase solide en fonction de T et des données du problème. Tracer la courbe $P(T)$ et donner ses principales caractéristiques.
6. Le modèle vous semble-t-il justifié pour les hautes températures ? À quelles températures cela correspond-il ?

Formulaire

- Volume d'une sphère de rayon R dans un espace de dimension D : $V_D(R) = \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} R^D$.
- Formules de Stirling : $\ln N! \simeq N \ln N - N$ et $\ln \Gamma(x + 1) \simeq x \ln x - x$.

Fin.