Département d'Automatique, Master 1– S2-Année 2018-2019

*Examen Final : Systèmes Non linéaires. Durée 01h45*

**Ex.#1 :(7pts)** Considérons un système non linéaire décrit par le modèle d'état suivant

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + \frac{\left(2+x_3^2(t)\right)}{x_3(t)}u(t)\ ;\ \dot{x}_2(t) = x_3(t)\ ;\ \dot{x}_3(t) = x_1(t)x_3(t)\ ;\ y(t) = x_2(t)$$

Où $u(t)$ désigne l'entrée de commande, $y(t)$ la sortie et $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ les variables d'état avec $x_3(t) \neq 0, \forall t \geq 0$.

1) Déterminer le degré relatif.

2) Considérons le changement de coordonnées suivant : $z_1 = \phi_1(x) = h(x)$ ; $z_2 = \phi_2(x) = L_f h(x)$ ; $z_3 = \phi_3(x) = L_f^2 h(x)$. Montrer que $\Phi(x) = [\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \phi_3(x)]^T$ est un difféomorphisme.

3) Donner le modèle d'état dans les nouvelles coordonnées.

4) Déterminer le bouclage $u(x) = \frac{1}{b(x)}(-a(x)+v)$ linéarisant entrée/sortie. Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $g_f(p) = \frac{Y(p)}{V(p)}$

5) Déterminer l'expression de la commande auxiliaire v de telle manière que la sortie suit asymptotiquement la référence constante $y_d$ en imposant les pôles égaux à -1, -2 et -3

**Ex.#2 (7pts)** : Le déplacement d'une masse est décrit par l'équation différentielle suivante

$m\ddot{y}(t) + cy(t) = u(t)$

Où $y(t)$ désigne le déplacement et $u(t)$ la force appliquée. On prend $m=1$ et $c=1$ en unités normalisées.

1) Soit $u(t) = -y^2(t)$. Déterminer les points d'équilibre en boucle fermée. Analyser la stabilité des points d'équilibre et préciser leur nature.

2) On considère cette fois-ci $u(t) = y(t) + \mathrm{sign}(1-\dot{y}(t))$

a) Déterminer l'équation de la droite de commutation qui sépare le plan de phase en deux zones de fonctionnement.

b) Soient $y(0)=0$ et $\dot{y}(0)=2$ les conditions initiales. Caractériser soigneusement la trajectoire de phase en précisant son équation dans chaque zone de fonctionnement. Donner l'allure du tracé de cette trajectoire dans le plan de phase. Conclure sur la stabilité du système contrôlé.

**Ex.#3 (6pts) :** Considérons l'asservissement non linéaire schématisé par la figure 1 (Page 2) où la fonction de transfert de la partie linéaire est $G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p+1)^2}$. Le lieu de Nyquist de $G(j\omega)$ est tracé en figure 2 (Page 2). Le gain complexe équivalent de l'élément non linéaire est donné par

$N(A) = \frac{1}{\pi A} - j\frac{1}{\pi A}$

1) Tracer le lieu critique.

2) Monter que l'asservissement est le siège d'un cycle limite. Etudier la stabilité du cycle limite. Déterminer la pulsation et l'amplitude des oscillations auto-soutenues.

**Indication** : $\mathrm{Artg}(x) + \mathrm{Arctg}(y) = \mathrm{Arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ ; $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$

Nature et stabilité des points d'équilibre d'un système non linéaire du second ordre.

| Valeurs propres réelles non nulles | | | | | Valeurs propres complexes $\lambda_1 = \alpha + j\beta$ ; $\lambda_2 = \alpha - j\beta$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valeurs propres distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$ | | | Valeurs propres égales $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ | | Partie réelle négative $\alpha < 0$ | Partie réelle Nulle $\alpha = 0$ | Partie réelle positive $\alpha > 0$ |
| | | | 2 blocs de Jordan | 01 bloc de Jordan | | | |
| $\lambda_1<0$ et $\lambda_2<0$ Nœud Stable | $\lambda_1>0$ et $\lambda_2>0$ Nœud Instable | $\lambda_1<0$ et $\lambda_2>0$ Col (Instable) | $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ Nœud Etoilé Stable | $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ Nœud Dégénéré Stable | Foyer Stable | Centre (limite de stabilité) | Foyer Instable |
| | | | $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ Nœud Etoilé Instable | $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ Nœud Dégénéré Instable | | | |


Figure 1

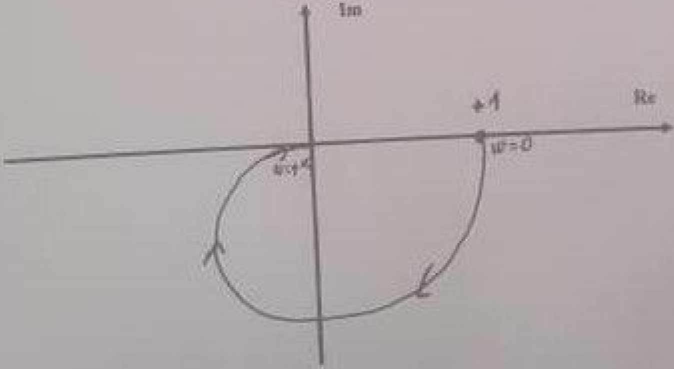



Figure 2

Exo 1 (08,5pts)

1) • L'écriture du système sous forme affine en entrée

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -x_1 \\ x_3 \\ x_1 x_3 \end{pmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2x_1x_3^2}{x_3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{g(x)} u \quad ; \; x_3 \neq 0$$

$$y = x_2 \longrightarrow h(x)$$

• Calcul du degré relatif (2,5 pts)

$\rightarrow L_g h(x) = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{2x_1x_3^2}{x_3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

$\rightarrow L_f h(x) = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_3 \\ x_1 x_3 \end{bmatrix} = x_3$

$\rightarrow L_g L_f h(x) = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{2x_1x_3^2}{x_3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

$\rightarrow L_f^2 h(x) = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_3 \\ x_1 x_3 \end{bmatrix} = x_1 x_3$

$\rightarrow L_g L_f^2 h(x) = [x_3 \quad 0 \quad x_1] \begin{bmatrix} \frac{2x_1x_3^2}{x_3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2x_1 x_3^2$
$(x_1, x_3 \neq 0)$

$\Rightarrow L_g L_f^2 h(x) \neq 0 \Rightarrow r-1 = 2 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow r = n \rightarrow$ système complètement linéarisable par retour d'état

Changement de coordonnée

$z_1 = \phi_1(x) = h(x) = x_2 = \phi_1(x)$

$z_2 = \phi_2(x) = L_f h(x) = x_3 = \phi_2(x)$

$z_3 = L_f^2 h(x) = x_1 x_3 = \phi_3(x)$

$$z = \phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 x_3 \end{bmatrix}$$ (1,5pt)

il faut que $\phi^{-1}(z)$ existe, c'est à dire que $\phi(x)$ est un difféomorphisme

vérifions

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_3 & 0 & x_1 \end{bmatrix}$$

$\det\left(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x}\right) = x_3 \neq 0$ car $x_3 \neq 0 \Rightarrow \phi(x)$ est un bien un difféomorphisme

3) Forme normale dans les nouvelles coordonnées

$\dot z_1 = \dot x_2 = x_3 = z_2$

$\dot z_2 = \dot x_3 = x_1 x_3 = z_3$

$\dot z_3 = \dot x_1 x_3 + x_1 \dot x_3 = -x_1 x_3 + (2 + x_3^2) u + x_1^2 x_3$

$= \underbrace{-x_1 x_3 + x_1^2 x_3}_{a(x)}$ $\quad \underbrace{(2 + x_3^2)}_{b(x)} u$

Forme normale
$$\begin{cases} \dot z_1 = z_2 \\ \dot z_2 = z_3 \\ \dot z_3 = a(x) + b(x) u \end{cases}$$
$y = z_1$

(1,5pt)

. Bouclage linéarisant

$$u(x) = \frac{1}{b(x)}\left(-a(x) + v\right)$$

$$u(x) = \frac{1}{2+x_3^2}\left(x_1 x_3 - x_1^2 x_3 + v\right) \quad 0,5pt$$

$v$ : entrée auxiliaire

• Système linéaire (en boucle fermée) et fonction de transfert

Quand on applique la commande linéarisante $u(x)$ on obtient le système linéaire

$$\begin{bmatrix} \dot z_1 \\ \dot z_2 \\ \dot z_3 \end{bmatrix} = \overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \overset{B}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} v$$

$$y = \underset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad 0,5$$

$(A,B,C)$ forme de Brunovsky

fonction de transfert $G(p) = \dfrac{Y(p)}{V(p)} = \dfrac{1}{p^3}$

5) Commande de trajectoire

$$v = \dddot y_d - c_2(\ddot y - \ddot y_d) - c_1(\dot y - \dot y_d) - c_0(y - y_d)$$

$y_d$ = constante $\Rightarrow \dddot y_d = \ddot y_d = \dot y_d = 0$ donc

$$v = -c_2 \ddot y - c_1 \dot y - c_0(y - y_d)$$

L'erreur de poursuite obéit à l'équation différentielle

$$\dddot e + c_2 \ddot e + c_1 \dot e + c_0 e = 0$$

Équation caractéristique $\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0$

3 valeurs choisies sont $-1, -2, -3$ donc

$$(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

par identification $c_2 = 6, \; c_1 = 11, \; c_0 = 6$ 2pt

d'où $v = -6\ddot y - 11\dot y - 6(y - y_d)$

(7pts)

$m\ddot{y} + cy = u$ (4)

$m = c = 1$ (u, N) $\Rightarrow \ddot{y} = -y + u$

Modèle d'état $x_1 = y \rightarrow \dot{x}_1 = x_2$

$x_2 = \dot{y} \qquad \dot{x}_2 = -x_1 + u$

) Cas $u = -y^3 = -x_1^3$ alors en BF le système s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_1^3 \end{cases}$$

Points d'équilibre: Équation d'équilibre $\begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 - x_1^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1(1 + x_1^2) = 0$

comme les variables d'état sont réelles $\Rightarrow 1 + x_1^2 \neq 0$ alors la seule solution est $x_1 = 0$ $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ → origine du plan de phase

→ 1 seul point d'équilibre

. Stabilité et Nature du point d'équilibre

$$A(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-3x_1^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$f_1(x_1, x_2) = x_2$

$f_2(x_1, x_2) = -x_1 - x_1^3$

$A(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ spectre de A (valeurs propres) $\lambda_1 = +j$, $\lambda_2 = -j$

2 valeurs propres complexes conjuguées à partie réelle nulle

le point d'équilibre est à la limite de stabilité c'est un

Centre — (3pts)

(5)

$\Rightarrow \quad u = y(t) + \text{sign}(1 - \dot{y})$

$\Rightarrow \quad u = x_1 + \text{sign}(1 - x_2)$

$$\text{sign}(m) = \begin{cases} +1 & m > 0 \\ 0 & m = 0 \\ -1 & m < 0 \end{cases}$$

... à dire que

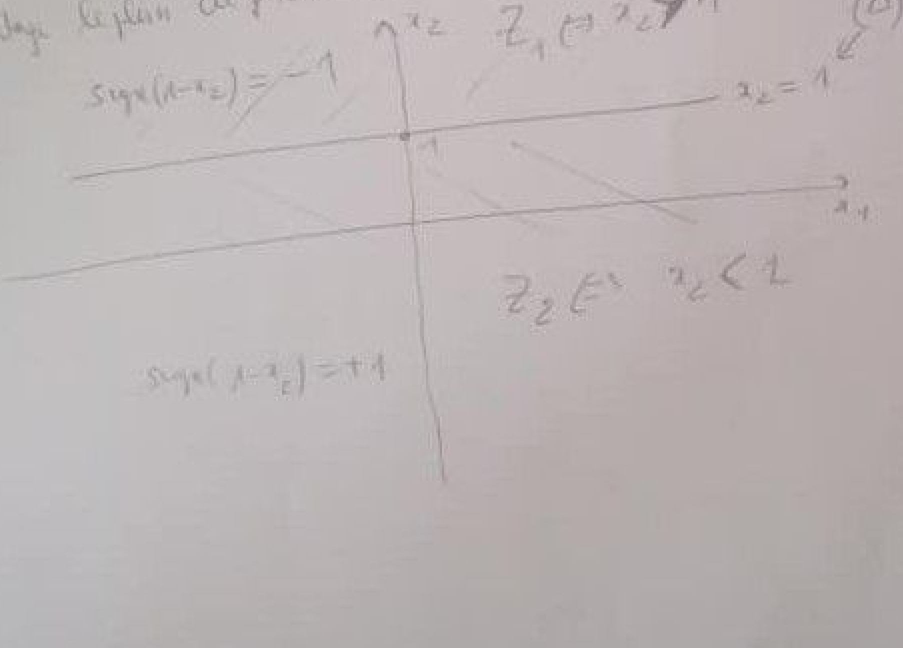
$$\text{sign}(1 - x_2) = \begin{cases} +1 & \text{si } 1 - x_2 > 0 \Leftrightarrow x_2 < 1 \\ = 0 & \text{si } 1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 1 \\ -1 & \text{si } 1 - x_2 < 0 \Leftrightarrow x_2 > 1 \end{cases}$$

<u>... de commutation</u>

... BF on a le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_1 + \text{sign}(1 - x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \text{sign}(1 - x_2) \end{cases}$$

... droite $\underline{x_2 = 1}$ est la droite de commutation qui partage le plan de phase en 2 zones $Z_1$ et $Z_2$ définies



... de la trajectoire

$x_1(0) = 1 \qquad x_2(0) = 2$

Comme $x_2(0) = 2 > 1$ alors on est dans la zone une et

$1 - x_2(0) < 0 \Rightarrow sign(1 - x_2(0)) = -1 \Rightarrow$ le système s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = 2 \quad (1) \\ \dot{x}_2 = -1 & x_2(0) = 2 \quad (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow x_2 = -t + x_2(0) = -t + 2$

$(1) \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}t^2 + 2t$

$x_1 = -\frac{1}{2}(2 - x_2)^2 + 2(2 - x_2) \Rightarrow$ Équation d'une parabole "inversée"

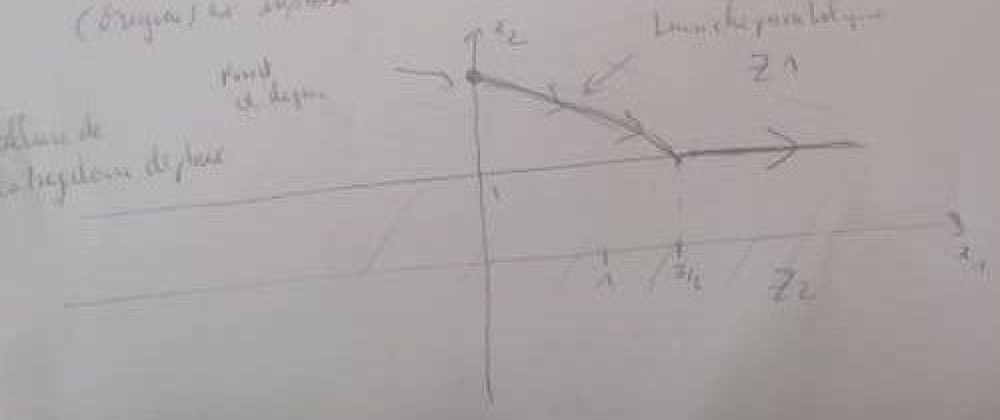
à $t = t_1$ on aura $x_2 = 1$ on est donc sur la droite de commutation et à $t = t_1$ on a $x_1(t_1) = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$

donc à $t = t_1$ $x_2 = 1$ $1 - x_2 = 0 \Rightarrow sign(1 - x_2) = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 1 \text{ et } \dot{x}_1 = 1 \quad 3p5$$

$x_1 = t + \frac{1}{2}$ l'infini indéfiniment

$x_2(t)$ reste 1 indéfiniment et $x_1(t)$ croît vers l'infini, le point d'équilibre on rejoindra donc jamais à la zone 2, (Origine) est instable



3)

$$C(A) = -\frac{1}{N(A)} = -\pi A \frac{1}{1+j} = -\pi A \frac{(1-j)}{2} = -\frac{\pi A}{2} + \frac{j\pi A}{2}$$

$C(A) = X(A) + j\,Y(A)$

partie réelle $X(A) = -\frac{\pi A}{2}$

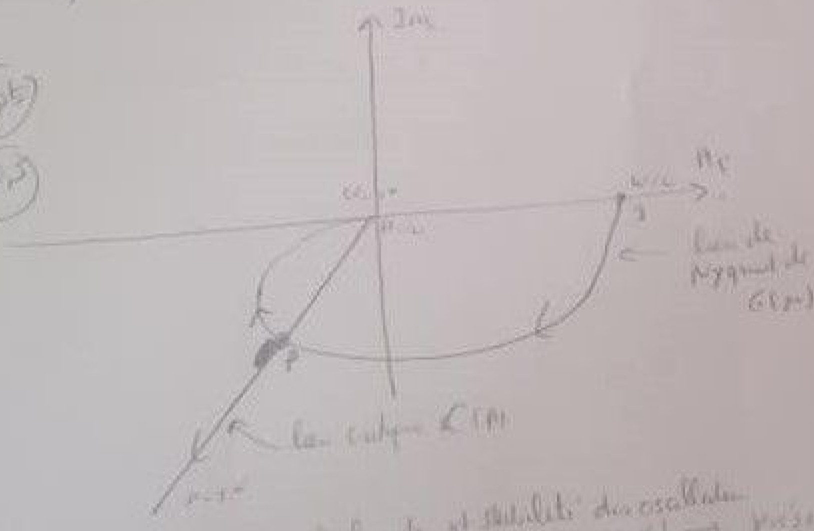
partie imaginaire $Y(A) = -\frac{\pi A}{2}$

On a $Y = X \Rightarrow$ donc le lieu critique est une droite avec

| $A$ | $0^+$ | $\rightarrow$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $X$ | $0$ | $\rightarrow$ | $-\infty$ |
| $Y$ | $0$ | $\rightarrow$ | $-\infty$ |

2pts

+0,5




2) Existence d'un cycle limite et stabilité des oscillations

→ Point d'intersection entre les 2 lieux (point P) ⇒ présence d'un cycle limite

En vertu du critère de Nyquist le point du lieu critique [illegible] de P [illegible] par le lieu

→ [illegible] cycle limite stable ⇒ oscillations auto-entretenues

1pt

... de la pulsation et de l'amplitude des oscillations

La pulsation au point P correspond à la pulsation pour laquelle l'argument $\varphi(\omega)$ de $G(j\omega)$ est égal à $-\frac{3\pi}{4}$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{Arg} G(j\omega) = \operatorname{Arg} \frac{1}{(1+j\omega)(1+j\omega)} = -(\operatorname{Arctg}\omega + \operatorname{Arctg}\omega)$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{Arctg}\frac{2\omega}{1-\omega^2}$$

$$\varphi(\omega_P) = -\frac{3\pi}{4} = -\operatorname{Arctg}\frac{2\omega_P}{1-\omega_P^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2\omega_P}{1-\omega_P^2} = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = -1$$

$\Rightarrow \omega_P$ solution positive de l'équation du 2ème degré

$$\omega_P^2 - 2\omega_P - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_P = 1+\sqrt{2}\ \text{rad/s}}$$

Calcul de l'amplitude A au pt P

$$OP = \|G(j\omega_P)\| = \frac{1}{1+\omega_P^2} = \frac{1}{4+2\sqrt{2}}$$

$$OP = |C(A)| = \sqrt{X^2(A)+Y^2(A)} = \frac{\pi A}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi A}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4+2\sqrt{2}} = \boxed{A = \frac{\sqrt{2}}{\pi(4+2\sqrt{2})}}$$