CHAPITRE II

MAGNETOSTATIQUE

- Une charge électrique immobile crée un champ électrique seulement;
- Une charge en mouvement (un courant) crée un champ électrique et un champ magnétique.

Définition : la magnétostatique est l'étude des phénomènes magnétiques statiques, générés par des courants constants uniquement (courant continu).

I. LOI D'AMPERE

Le physicien danois Hans C. Oersted (1777 – 1851), en remarquant la déviation d'une boussole placée prés d'un conducteur traversé par un courant, fut le premier à observer le magnétisme crée par un courant électrique.

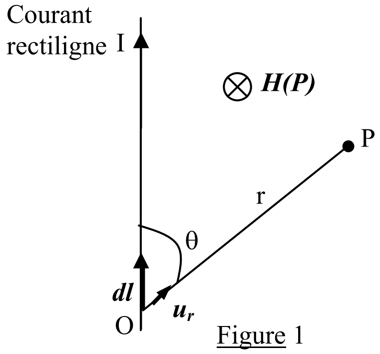


Figure 1

Conducteur rectiligne

$$\boxed{\boldsymbol{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I\,\boldsymbol{dl} \wedge \boldsymbol{u_r}}{4\pi r^2}\ ;}$$

H : champ magnétique

r = OP ; $\boldsymbol{u_r}$: vecteur unitaire de r

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I\ \boldsymbol{dl} \wedge \boldsymbol{u_r}}{4\pi\ r^2}}$$

B : Induction magnétique

Remarque : La loi d'Ampère est valable si l'on suppose que le conducteur est infiniment long, donc les bornes de l'intégrale sont de -∞ à +∞.

Conducteur fermé :

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \oint \frac{\mu_0 I\ \boldsymbol{dl} \wedge \boldsymbol{u_r}}{4\pi\ r^2}}$$

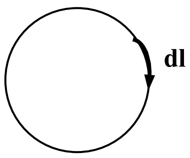


Figure 2 : Courant circulaire

Avec

μ_0 perméabilité magnétique (vide, air…) : $\mu_0 = 4\,\pi.10^{-7}\quad H/m$

$B = \mu_0 H$

Unités

$[B] = Tesla\quad T$; $[H] = \frac{A}{m}$

Cas d'un courant volumique :

J densité de courant (A/m^2) ;

$J = I / S$,

soit $I = J\,S$,

ou bien plus généralement :

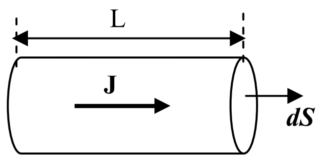


Figure 3: Conducteur volumique

$I=\int \mathbf{J.dS} \;\Rightarrow\; \mathbf{Idl}=\int \mathbf{J.dSdl}=JSdl=JdV$

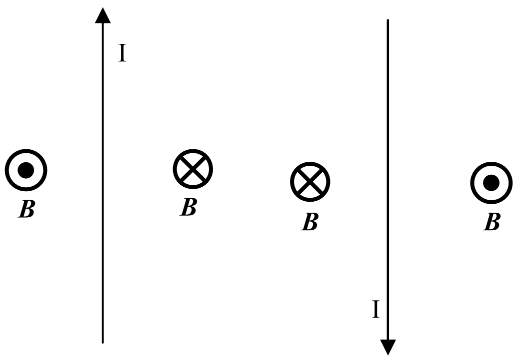
Le champ magnétique d'un courant cylindrique (volumique) est donné par :

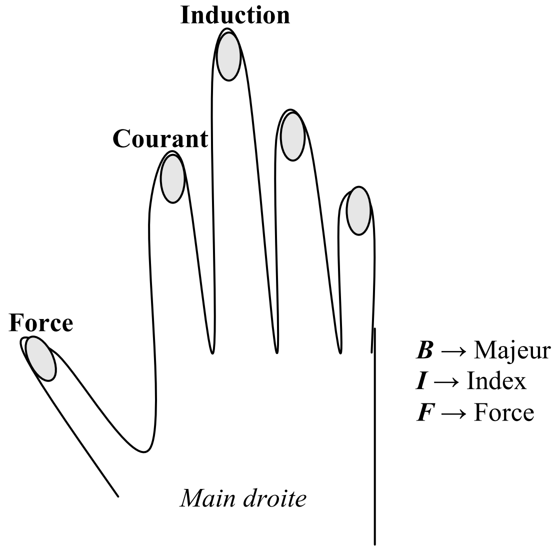
$$\boxed{\mathbf{H}=\int \frac{\mathbf{J}\wedge\mathbf{u_r}}{4\pi r^2}dv}$$

soit donc : $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}=\mu_0\int \frac{\mathbf{J}\wedge\mathbf{u_r}}{4\pi r^2}dv$

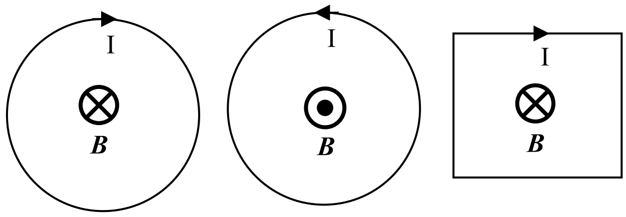
II. DIRECTION DU CHAMP MAGNETIQUE (Règle de la main droite)

a) Fil rectiligne : (Règle de la main droite)





b) Spire : (Règle du tournevis)



III. POTENTIEL MAGNETIQUE

Comme q est un scalaire, qui produit un potentiel électrique scalaire V ;
Par analogie avec l'électrostatique :
L'élément ***Idl*** est un vecteur, produit un potentiel magnétique vectoriel **A**.

$\boldsymbol{B}=rot\boldsymbol{A}$

$$\boxed{\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}}{r}dV}$$

qui représente l'expression du potentiel $\boldsymbol{A}$.

IV. THEOREME D'AMPERE

1. Théorème d'Ampère :

$\oint \boldsymbol{H.dl}=?$

$\boldsymbol{H}=\frac{I}{2\pi r}\boldsymbol{u}$

$\oint \boldsymbol{H.dl}=\oint \frac{I}{2\pi r}\boldsymbol{u.dl}$

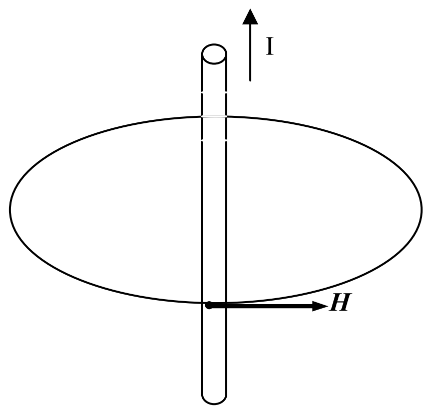


Figure 4

Rappel :

$\boldsymbol{A.u_x}=(A_x\boldsymbol{u_x}+A_y\boldsymbol{u_y}+A_z\boldsymbol{u_z})\boldsymbol{u_x}=A_x$

soit donc, la composante de $\boldsymbol{A}$ suivant l'axe des x. Par analogie : $\boldsymbol{dl.u}=dl'$ est la composante de $\boldsymbol{dl}$ suivant $\boldsymbol{u}$.

Comme par ailleurs, $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{u_r}$, soit $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{r}$, donc aussi $dl'\perp r$;

dl' représente donc un arc de cercle de rayon r $\Rightarrow$ $dl'=rd$

Par conséquent :

$$\oint \boldsymbol{H.dl} = \oint H dl = \frac{I}{2\pi}\oint \frac{r\,d\theta}{r} = \frac{I}{2\pi}\oint d\theta = \frac{I}{2\pi}\theta\Big)_0^{2\pi} = I$$

Donc $\oint \boldsymbol{H.dl} = I$

qui représente le théorème d'Ampère.

Remarque importante : I est un courant circulant à l'intérieur du contour fermé.

2. Forme différentielle :

$\oint \boldsymbol{H.dl} = I$ est la forme intégrale du théorème d'Ampère.

Comme $\oint \boldsymbol{H.dl} = \int_S rot\boldsymbol{H.dS}$

et que $I = \int_S \boldsymbol{J.dS}$,

On peut écrire : $\int_S rotH.dS = \int_S \boldsymbol{J.dS}$

Soit donc : $\boxed{rot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}}$ qui représente la forme différentielle du théorème d'Ampère.

Conclusion : *$rot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ implique que le champ magnétique est rotationnel, c'est à dire que les lignes de champ sont fermées, contrairement aux lignes de champ électrique.*

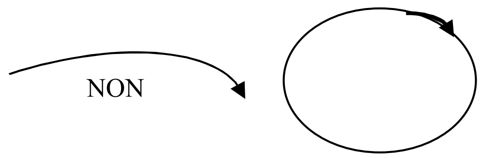


Figure 5

Remarque :
- Les lignes de champ magnétique sont des courbes fermées car contrairement au champ électrique qui a pour source des charges électriques (part de la charge positive et arrive à la charge négative), il n'y a pas de *charges magnétiques.*

IV. FLUX MAGNETIQUE

$\Phi_m = \boldsymbol{B.dS}$;

Unité $[\Phi_m] = Weber\ Wb$;

a) Surface non fermée

Flux: représente la quantité de lignes de champ passant à travers la surface.

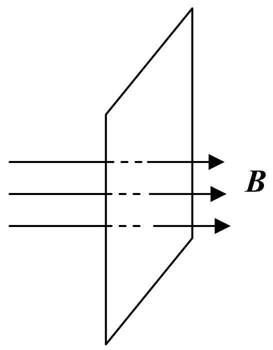


Figure 6 : Surface non fermée

b) Surface fermée

$\oint \boldsymbol{B.dS} = div\mathbf{B}\,dV = div(rot\mathbf{A})dV = 0$; car $\boldsymbol{B} = rot\boldsymbol{A}$

$$\boxed{\oint \boldsymbol{B.dS} = 0}$$

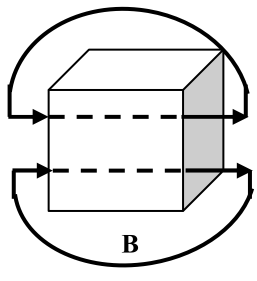


Figure 7 : Surface fermée

Forme différentielle :

$\oint \boldsymbol{B.dS} = 0$ est la forme intégrale de cette loi.

$\oint \boldsymbol{B.dS} = \int div\boldsymbol{B}\, dv = 0 \Rightarrow div\boldsymbol{B} = 0$

$\boxed{div\, \boldsymbol{B} = 0}$ est la forme différentielle.

V. FORCE MAGNETIQUE

1. Force de Lorentz :

Une charge électrique animée d'une vitesse $\boldsymbol{v}$ et placée dans un champ électrique et magnétique, subit la force suivante :

$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B})$;

$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{F_e} + \boldsymbol{F_m}$

avec :

$\boldsymbol{F_e} = q\boldsymbol{E}$ est la Force électrique;

Si $q = 0 \Rightarrow F_e = 0$

La force électrique s'annule si la charge est nulle.

$\boldsymbol{F_m} = q(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B})$ est la Force magnétique.

La force magnétique s'annule si la charge est nulle ou immobile.

L'induction magnétique n'exerce de force que sur une particule chargée en mouvement (ou un courant).

Conclusion:

La force magnétique n'agit que sur une charge en mouvement, ou un conducteur traversé par un courant.

EXERCICE

Un fil conducteur est traversé par un courant (figure 5). Quelle est la direction de la force appliquée sur :

- un électron se déplaçant vers le fil ;
- un proton se déplaçant parallèlement au fil (fig. a). Supposez que l'électron et le proton se déplacent dans le plan du papier.

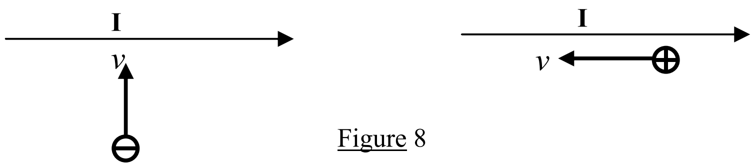


Figure 8

2. Force de Laplace :

Considérons un conducteur cylindrique traversé par un courant I.

Soient :

n' : nombre de particules chargées traversant le conducteur;

e : charge élémentaire d'une particule.

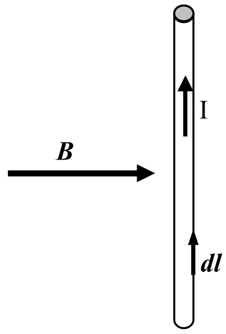


Figure 9

La charge traversant le conducteur vaut alors :

$q = n'e$

En posant $n = \frac{n'}{V}$

n : nombre de particules/unité de volume ;

V : volume du conducteur.

On obtient :

$I=\frac{dq}{dt}=\frac{d}{dt}(n'e)=\frac{d}{dt}(neV)=ne\frac{dV}{dt}=neS\frac{dl}{dt}=neSv$;

avec

v : vitesse de déplacement des particules.

Par conséquent :

$J=\frac{I}{S}=\frac{neSv}{S}=nev \Rightarrow J=nev$

Cette égalité est également valable en notation vectorielle :

$$\boxed{\boldsymbol{J}=ne\boldsymbol{v}}$$

D'un autre côté, en reportant dans la loi de Lorentz la charge par unité de volume $q=ne$, on obtient :

$\boldsymbol{F_m}=q(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B})=ne\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}=\boldsymbol{J}\wedge\boldsymbol{B}$

<u>Pour un volume élémentaire</u> dV :

$d\boldsymbol{F_m}=(\boldsymbol{J}\wedge\boldsymbol{B})dV$

<u>pour tout le volume V :</u>

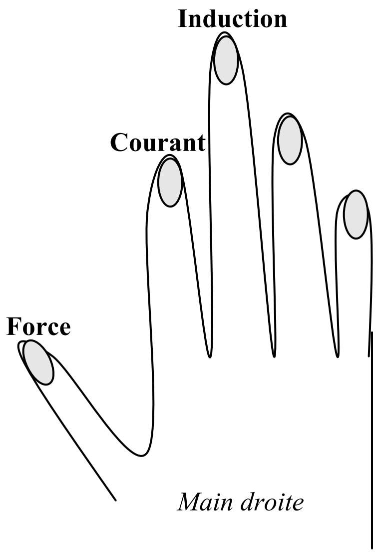
$\boldsymbol{F_m}=\int(\boldsymbol{J}\wedge\boldsymbol{B})dV=\int(\boldsymbol{J}dV\wedge\boldsymbol{B})$

Comme $\boldsymbol{J}dV=I\boldsymbol{dl}$, on aboutit à l'expression de la *Force de Laplace*: $\boxed{\boldsymbol{F_m}=\int I\boldsymbol{dl}\wedge\boldsymbol{B}}$

<u>Remarque</u> :

Si I = 0 $\Rightarrow$ $F_m=0$

La force magnétique n'agit donc que sur un conducteur traversé par un courant.



$\boldsymbol{B}$ → Majeur
$\boldsymbol{I}$ → Index
$\boldsymbol{F}$ → Force

<u>Figure</u> 10

VII. ENERGIE MAGNETIQUE W_m

On considère l'exemple d'une bobine torique comprenant n spires.
Déterminer l'énergie emmagasinée quand le courant dans la bobine croit de 0 à I.
Considérons un circuit formé par une inductance.

A l'instant   nous avons : $U=L\frac{dI}{dt}$

En multipliant les deux membres par i dt de façon à faire apparaître les énergies mises en jeu pendant dt :

$Uidt=Lidi=d\frac{1}{2}Li^2$

Le terme $U\,i\,dt$ représente l'énergie fournie par le générateur, le terme $dW=d\frac{1}{2}Li^2$ correspond à l'énergie
t
fournie pour établir le courant i, énergie emmagasinée dans l'inductance.

Démonstration :

Par analogie avec l'électrostatique où la densité de l'énergie électrostatique $w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$, démontrer que la densité de l'énergie magnétique est $w_m=\frac{1}{2}\mu_0H^2$.

Considérons pour cela un tube élémentaire d'induction

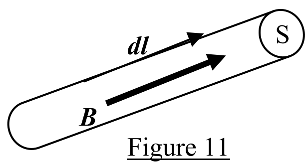


Figure 11

Posons
$dV = S\,dl$
L'énergie magnétique localisée dans l'élément de volume dV est :

$dW=\frac{1}{2}\pi_0H^2dV=\frac{1}{2}\pi_0H^2Sdl$

En tenant compte que le flux d'induction est constant dans le tube : $\Phi=\ \boldsymbol{B}.\boldsymbol{dS}=B.S$

et du théorème d'Ampère : $\oint\boldsymbol{H}.\boldsymbol{dl}=I$,

on obtient :

$W=\frac{1}{2\pi_0}B^2Sdl=\frac{1}{2\pi_0}BS\int Bdl=\frac{1}{2}BS\int Hdl=\frac{1}{2}\Phi I$

Comme
$\Phi = L\,I$
$W=\frac{1}{2}\Phi I=\frac{1}{2}LI^2$

Conclusion : le champ magnétique emmagasine bien une énergie de densité $w_m = ½\,\mu_0\,H^2$.

Autre démonstration :
Soit U la tension appliquée,
Le travail fourni
$W=-\ UIdt$;

Or $U=-n\frac{d}{dt}$

$U=-n\frac{d}{dt}=-nS\frac{dB}{dt}-nB\cancelto{=0}{\frac{ds}{dt}}$

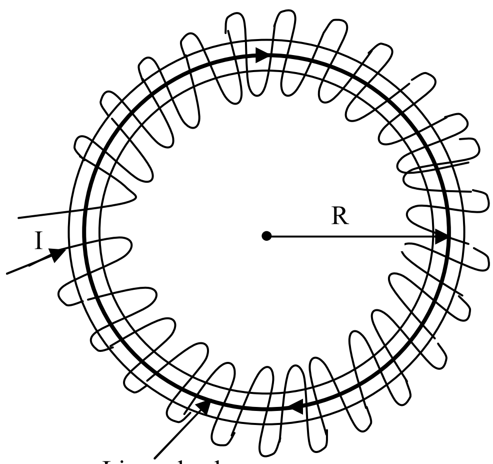


Figure 12

Soit $W=-\int -n\frac{d\varphi}{dt}Idt=n\int I\,d\varphi$

$$W=\int_0^B nIS\,dB=nIS\int_0^H \mu_0\,dH=nIS\mu_0\int_0^H dH$$

Comme $H=\frac{nI}{L}\Rightarrow I=\frac{LH}{n}$ (Exercice P6).

d'où $W=nS\mu_0\int_0^H \frac{LH}{n}dH=S\mu_0 L\int_0^H H\,dH=\frac{1}{2}\mu_0 H^2 SL$

avec $V=SL$ volume de la bobine où règne H, on obtient :

$W_m=\frac{1}{2}\mu_0 H^2 V$ [J],

est l'énergie totale emmagasinée dans le champ magnétique **H**.

$w_m=\frac{1}{2}\mu_0 H^2$ [J/m^3]

est la densité d'énergie magnétique.

VIII. RESUME DES LOIS DU REGIME STATIONNAIRE

1. Théorème de Gauss

$\oint \boldsymbol{E.dS}=\frac{q}{\varepsilon_0}$; $div\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

2. $\oint \boldsymbol{E.dl}=0$; $rot\mathbf{E}=0$

3. Théorème d'Ampère

$\oint \boldsymbol{H.dl}=I$; $rot\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$

4. Théorème du Flux Magnétique

$\oint \boldsymbol{B.dS}=0$; $div\boldsymbol{B}=0$

ANALOGIE ENTRE L'ELECTROSTATIQUE ET LA MAGNETOSTATIQUE

ELECTROSTATIQUE	MAGNETOSTATIQUE
Loi de Coulomb (champ électrique)	Loi de Biot & Savart (champ magnétique)
$q\rightarrow \boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{Idl}\rightarrow \boldsymbol{H}=\oint\frac{I\,\boldsymbol{dl}\wedge\boldsymbol{u_r}}{4\pi r^2}$
Déplacement électrique	Induction magnétique
$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$
Potentiel électrique	Potentiel magnétique
$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}$	$\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{J}}{r}dv$
$\boldsymbol{E}=-gradV$	$\boldsymbol{B}=rot\boldsymbol{A}$
$\oint \boldsymbol{E.dl}=0$	$\oint \boldsymbol{H.dl}=I$
$rot\boldsymbol{E}=0$	$rot\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$
$\oint \boldsymbol{E.dS}=\frac{q}{\varepsilon}$	$\oint \boldsymbol{B.dS}=0$
$div\boldsymbol{E}=\frac{\rho_v}{\varepsilon}$	$div\boldsymbol{B}=0$
$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$	$w_m=\frac{1}{2}\mu H^2$
$E=0$ dans un conducteur	$H\neq 0$ dans le conducteur