Chapitre III (suite): Analyse de Fourier à temps discret

III.2. La transformée de Fourier discrète (TFD) des signaux apériodiques (à énergie finie)

La transformée de Fourier discrète (TFD) d'un signal $x(n)$ apériodique (à énergie finie) est donnée par :

$$X(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j2\pi nf}$$

$X(f)$ représente le contenu fréquentiel du signal $x(n)$.

La condition suffisante, pour que la transformée $X(f)$ existe est que le signal soit absolument sommable :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|<\infty$$

Les signaux sont dits absolument sommables dans certains signaux à énergie finie. En effet, l'énergie d'un signal numérique $x(n)$ est définie par :

$$E_x=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|^2$$

Or on sait que :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|^2\leq\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|\right)^2$$

Il suffit qu'un signal soit absolument sommable pour qu'il soit à énergie finie. Par contre, un signal à énergie finie n'est pas nécessairement absolument sommable.
La transformée de Fourier d'un signal numérique, lorsqu'elle existe, est périodique de période unité.

$$X(f+1)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j2\pi n(f+1)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j2\pi nf}e^{-j2\pi n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j2\pi nf}=X(f)$$

Tout intervalle de longueur unité suffit pour décrire complètement la transformée de Fourier d'un signal numérique : en pratique, on utilise l'intervalle [-1/2,1/2].

N.B : Dans la définition de la transformée de Fourier d'un signal numérique, nous ne disposant d'aucune information sur la fréquence d'échantillonnage. Par contre, dans le cas où l'on connaîtra cette fréquence alors :

$$X(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j2\pi n\frac{f}{F_s}}$$

La transformée de Fourier inverse d'un signal numérique :

La fonction $X(f)$ peut être décomposé en série de Fourier sur sa période principale [-1/2,1/2]. Les coefficients de Fourier de cette décomposition est donnée par :

$$x(n)=\int_{-1/2}^{1/2}X(f)e^{j2\pi nf}df \rightarrow \text{Transformée de Fourier inverse}$$

Exemple : Trouver la transformée de Fourier discrète (TFD) de la fenêtre rectangulaire $w(n)$ représenté sur la figure suivante :

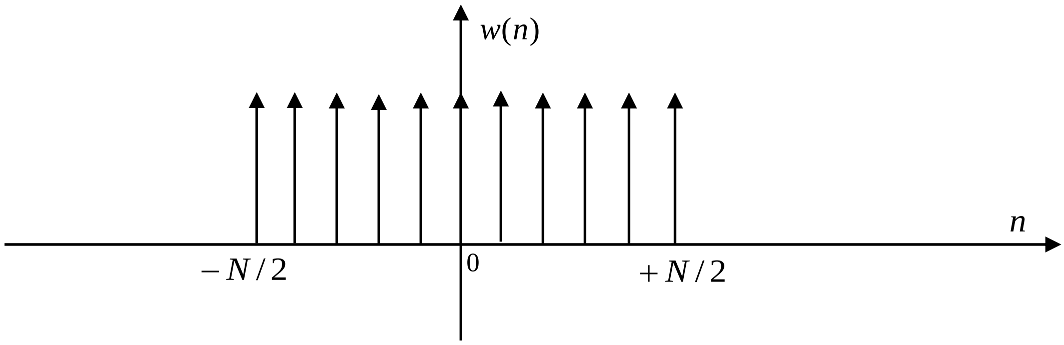

Figure 1 : Représentation graphique d'un signal rectangulaire

La transformée de Fourier de la fenêtre $w(n)$ est donnée par :

$$W(f)=\sum_{n=-N/2}^{N/2}e^{-j2\pi fn}=\frac{\sin(N\pi f)}{\sin(\pi f)}e^{-j\pi(N-1)f}$$

Le spectre d'amplitude est donné par :

$$|W(f)|=\frac{\sin(N\pi f)}{\sin(\pi f)}$$

La représentation graphique du spectre d'amplitude du signal rectangulaire $w(n)$ est donnée sur la figure ci-après (pour N=15 et N=25). Sur la période principale $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, le spectre d'amplitude est composé d'un lobe principal central d'amplitude N et de largeur 2/N puis de lobe secondaires dont l'amplitude baisse progressivement quand on s'éloigne du centre. C'est l'allure générale des fenêtres spectrales couramment utilisées mais avec des propriétés spécifiques.

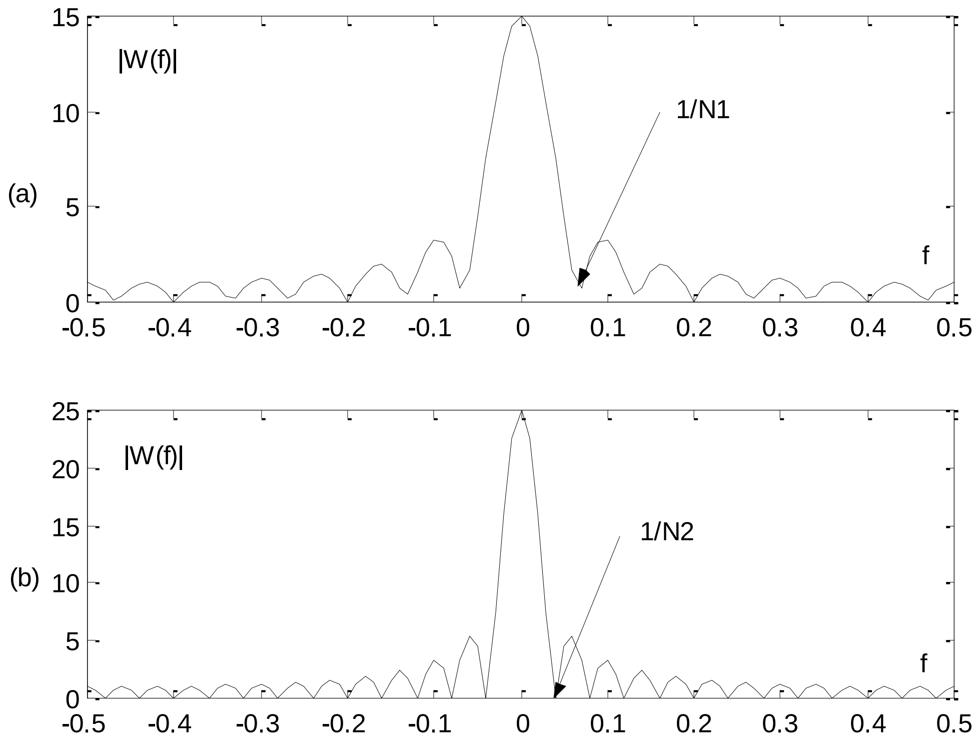

Figure 2 : TFD de la fenêtre rectangulaire de durée N a) N1=15 et b) N2=25

La densité spectrale d'énergie des signaux apériodiques :

L'énergie E_x d'un signal discret $x(n)$ apériodique est donnée par la relation de Parseval suivante :

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(f)|^2 df$$

En effet :

$$\begin{aligned} E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\bar{x}(n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \int_{-1/2}^{1/2} \bar{x}(f) e^{-j2\pi nf} df \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \bar{x}(f) \Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi nf} \Big) df \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \bar{x}(f) x(f) df = \int_{-1/2}^{1/2} |x(f)|^2 df \end{aligned}$$

Le spectre $X(f)$ d'un signal est en général complexe. En conséquence, il est souvent exprimé en forme polaire $X(f) = |X(f)|e^{j\theta(f)}$

Où $|X(f)|$ représente le spectre d'amplitude

Et $\theta(f)$ représente le spectre de phase

D'un autre côté la quantité $|X(f)|^2 = W_X(f)$ représente la distribution d'énergie dans le signal en fonction de la fréquence. Ainsi $W_X(f)$ est appelée la densité spectrale d'énergie.

On remarque aussi que $W_X(f)$ ne contient aucune information de phase ($W_X(f)$ est entièrement réelle et non négative). Ainsi puisque le spectre de phase n'est pas contenu dans $W_X(f)$ alors il est impossible de reconstruire le signal sachant $W_X(f)$.