Chapitre III (suite): Analyse de Fourier à temps discret

III.3. La transformée de Fourier rapide (TFR ou FFT)

La transformée de Fourier rapide est une méthode qui permet de réduire considérablement le temps de calcul de la transformée de Fourier discrète (TFD).
La transformée de Fourier discrète (TFD) donnée par la relation suivante :

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi\frac{nk}{N}}$$

Peut s'écrire sous forme matrice suivant la relation suivante :

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

Avec $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

$W_N^{nk} = e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} = \cos(2\pi\frac{nk}{N}) - j\sin(2\pi\frac{nk}{N})$ appelés coefficients de la TFD se trouvent sur le cercle unité comme le montre la figure ci-après.

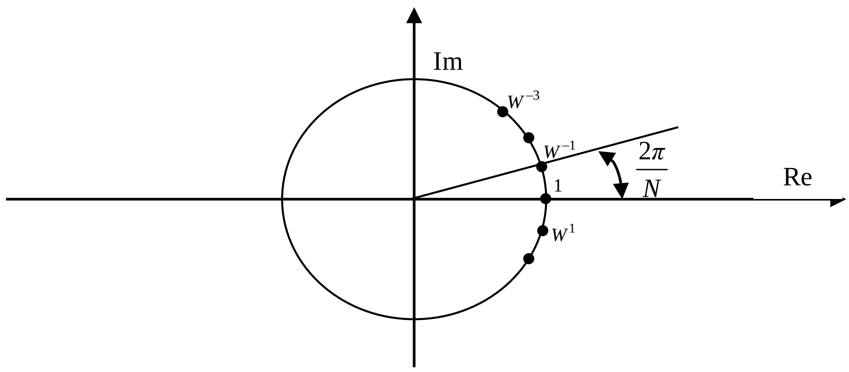


Figure 1

L'équation matricielle correspondante à la transformée de Fourier direct est donnée par :

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & \cdots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & \cdots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W^{(N-1)} & W^{2(N-1)} & W^{3(N-1)} & \cdots & W^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

Pour la transformée inverse, il suffit de retirer $\frac{1}{N}$ et de changer W^n en W^{-n}.

Avec : $T_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & \cdots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & \cdots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W^{(N-1)} & W^{2(N-1)} & W^{3(N-1)} & \cdots & W^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$

La matrice T_N présente des particularités qui sont les suivantes :

- Les lignes et les colonnes de même indice ont les mêmes éléments c-à-d $W(1,2) = W(2,1)$ *et* $W(1,3) = W(3,1)$*.....etc.*
- Les éléments de la matrice T_N sont des puissances d'un nombre de base W

Des simplifications importantes peuvent être donc envisagées conduisant à des algorithmes de calcul rapide. Ces algorithmes une fois implémentés nous effectuons ainsi une transformation de Fourier rapide (TFR) ou (FFT).
La transformée de Fourier rapide (en anglais Fast Fourier Transform, en abrégé FFT), publiée pour la première fois en 1965 par J.W. Cooley et J.W. Tuckey, est une technique de calcul rapide de la TFD.
Le gain en temps qu'offre la FFT par rapport au calcul direct est de l'ordre de :

$$gain = \frac{N}{\log_2(N)}$$

Par exemple si $N = 1024, \quad gain = \frac{1024}{\log_2(1024)} \cong 148$

Dans, pour $N = 1024,$ la FFT est environ 148 fois plus rapide que ce que pourrait donner un calcul direct à partir de la définition de la TFD.

Prenons le cas où $N = 8$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Sachant que :

$$X(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7}x(n)W_8^{nk}$$

$$=\frac{1}{8}(x(0)+x(1)W_8^{k}+x(2)W_8^{2k}+x(3)W_8^{3k}+x(4)W_8^{4k}+x(5)W_8^{5k}+x(6)W_8^{6k}x(7)W_8^{7k})$$

$$=\frac{1}{8}\{(x(0)+x(2)W_8^{2k}+x(4)W_8^{4k}+x(6)W_8^{6k})$$
$$+W_8^{k}(x(1)+x(3)W_8^{2k}+x(5)W_8^{4k}+x(7)W_8^{6k})\}$$

$$=\frac{1}{8}\{(x(0)+x(2)W_4^{k}+x(4)W_4^{2k}+x(6)W_4^{3k})$$
$$+W_8^{k}(x(1)+x(3)W_4^{k}+x(5)W_4^{2k}+x(7)W_4^{3k})\}$$

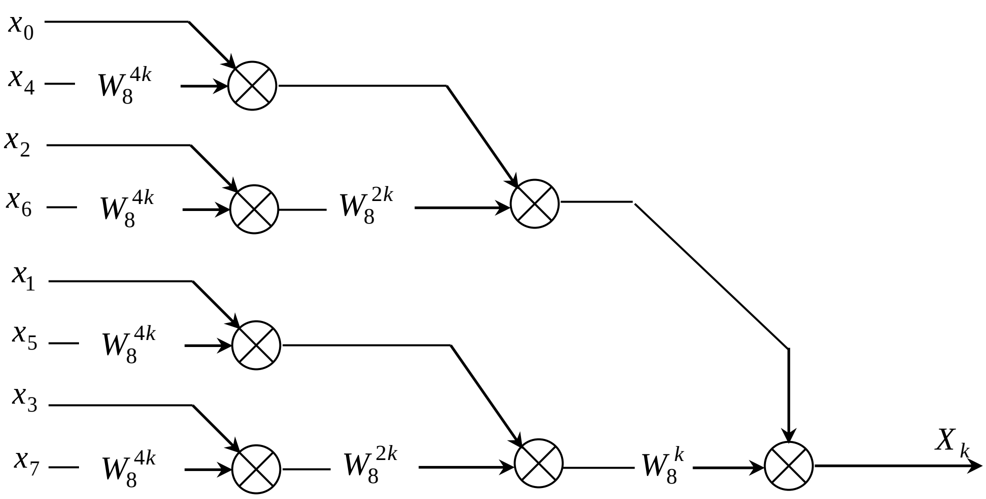
On a ainsi remplacé une TFD de taille 8 par deux TFD de taille 4. En itérant le procédé, on divise chaque fois par deux la taille de la TFD. Ce qui donne à l'étape suivante :

$$(x(0)+x(4)W_4^{2k})+W_4^{k}(x(2)+x(6)W_4^{2k})=(x(0)+x(4)W_2^{2k})+W_4^{k}(x(2)+x(6)W_2^{k})$$

et :

$$(x(1)+x(5)W_4^{2k})+W_4^{k}(x(3)+x(7)W_4^{2k})=(x(1)+x(5)W_2^{k})+W_4^{k}(x(3)+x(7)W_2^{k})$$

Un tel calcul est représenté sur la figure suivante :



La figure précédente fait apparaître une structure élémentaire appelée, du fait de sa forme, papillon (Butterfly).

La suite $x(n)$ a été ainsi décomposée en deux suites entrelacées, celle des éléments d'indice pair et celle des éléments d'indice impaire. On parle dans ce cas d'une transformée de Fourier rapide (FFT) avec entrelacement temporel.

La figure précédente montre le calcul d'un terme de la FFT. Pour le calcul de touts les termes de la FFT, les éléments $X(k)$ seront décomposé en deux partie de N/2 éléments comme suit :

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N/2-1} \end{bmatrix} = T_{N/2} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2(N/2-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & W^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & W^{N/2-1} \end{bmatrix} T_{N/2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

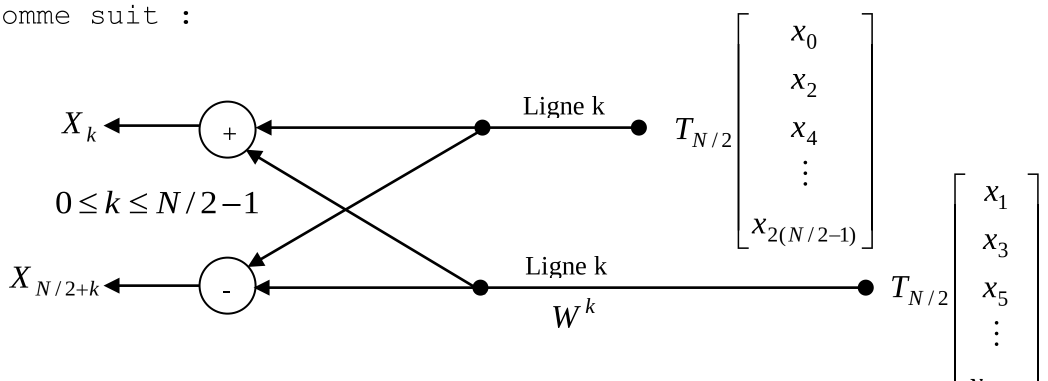
Et :

$$\begin{bmatrix} X_{N/2} \\ X_{N/2+1} \\ X_{N/2+2} \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = T_{N/2} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2(N/2-1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & W^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & W^{N/2-1} \end{bmatrix} T_{N/2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$T_{N/2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W^2 & \cdots & W^{2(N/2-1)} \\ 1 & W^4 & \cdots & W^{4(N/2-1)} \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & W^{2(N/2-1)} & \cdots & W^{2(N/2-1)(N/2-1)} \end{bmatrix}$$

La calcul de la TFR (FFT) peut se résumer en un diagramme représenté comme suit :

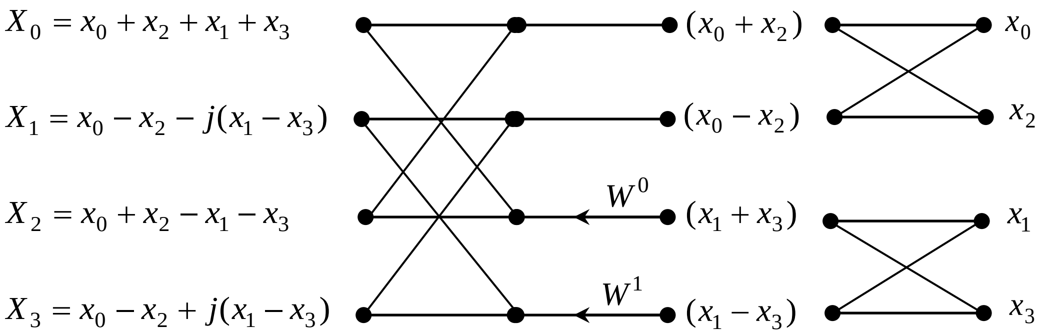


Exemple : la transformée d'ordre 4

La transformée d'ordre 4 a pour matrice :

$$T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & +j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & +j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

Son diagramme est donné par la figure suivante :



D'après le diagramme précédent, on remarque qu'il y a une nette réduction de calcul.
A titre d'exemple, le nombre de multiplications complexes a été réduit parce que certaines puissances de W présentent des particularités ; $W^0 = 1$ et $W^{N/4} = -j$ pour $N = 4$ on a $W^1 = -j$. Ce qui ne demande pas de multiplications complexes.
Cette réduction de calcul est nettement observée dans la matrice T_4.
On peut remarquer dans le traitement précédent que les $X(k)$ apparaissent dans l'ordre naturel des indices alors que les $x(n)$ se présentent dans un ordre permuté comme cela est indiqué dans le tableau qui suit :

	Codage binaire	renversement	
$X(0)$	000	000	$x(0)$
$X(1)$	001	100	$x(4)$
$X(2)$	010	010	$x(2)$
$X(3)$	011	110	$x(6)$
$X(4)$	100	001	$x(1)$
$X(5)$	101	101	$x(5)$
$X(6)$	110	011	$x(3)$
$X(7)$	111	111	$x(7)$

La suite $X(k)$ peut être aussi décomposée de la même façon en 2 suites entrelacées ; on parle dans ce cas de transformée de Fourier rapide avec entrelacement fréquentiel.

Dans MATLAB, la transformée de Fourier rapide est calculée par la fonction fft. Elle a pour syntaxe :

$$xf = fft(xt, N)$$

La séquence obtenue xf est la TFD de la séquence xt de longueur P calculée sur N points de fréquence. Si le paramètre N est absent, il est pris égal à P.

Bien que la fonction fft permette de calculer les valeurs de la TFD pour un nombre N quelconque de points de fréquences, il est conseillé, pour des raisons de rapidité, de prendre N égale à une puissance de deux. Exemple : 128, 256, 512, 1024
Dans MATLAB, la fonction N=nextpow2(P) fournit la puissance de 2 la plus proche de P par valeurs supérieures.

Limitations de la durée d'analyse :

Un signal ne peut être complètement restitué par N échantillons de sa TFD que si sa durée effective est inférieure ou égale à N. Dans la réalité, les signaux ne sont pas de durée strictement limitée donc on est amené à établir une approximation de la TFD en sectionnant le signal pour en limiter la durée. En pratique, ce sectionnement se fait en multipliant le signal par une fonction dans le domaine temporel. Pour cela on dispose de plusieurs types de fonctions (appelées fenêtres de pondération) avec des caractéristiques spécifiques : fenêtre rectangulaire, fenêtre triangulaire, fenêtre de Blackman,….