

Chapitre 4 : Traitement numérique des signaux aléatoires

V.1. Introduction

Comme déjà décrit dans le premier chapitre un signal aléatoire est un signal qu'on ne peut pas définir sa valeur à un instant t . Par contre il est possible de définir une distribution de valeurs possibles à cet instant là. D'où l'idée d'utiliser des variables aléatoires pour décrire le phénomène à tout instant.

On appelle ainsi processus aléatoire (p.a), une famille de variables aléatoires $X(t,w)$. Si $t \in \mathbb{R}$, on parle de processus aléatoire à temps continu. Si $t \in \mathbb{Z}$, on parle de processus aléatoire à temps discret.

w est appelée une réalisation d'une expérience ou épreuve

Un processus aléatoire peut être vu de deux façons :

1. soit on fixe le temps et $X(t,w)$ est une variable aléatoire,
2. soit on fixe w et $X(t,w)$ se comporte comme une fonction temporelle déterministe appelée trajectoire du signal aléatoire

Dans Matlab, la fonction `randn`, permet de simuler les trajectoires d'un processus aléatoire gaussien centré de variance 1.

La figure suivante montre quatre trajectoires d'un même processus sur une durée de 100 points d'observation.

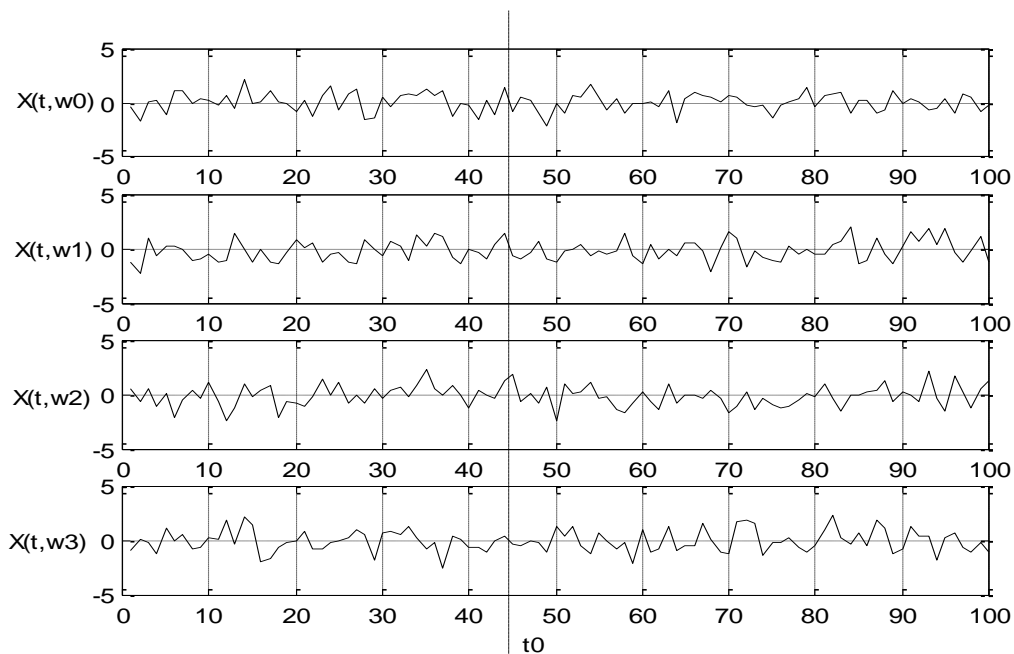


Figure 1

D'après la figure 1, nous remarquons que un instant t_0 fixe plusieurs réalisations sont possibles.

V.2. définition des moments, moyennes et variances :

V.2.1. Définitions des moments :

On définit sur l'ensemble des réalisations $\{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$, la moyenne statistique, en fixant un temps t_1 et qu'on note :

$$\overline{X}(t_1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_1(t_1) + X_2(t_1) + \dots + X_n(t_1)}{n}$$

Cette définition est équivalente à celle du moment du 1^{er} ordre :

$$\overline{X}(t_1) = E(X(t_1)) = m_{X(t_1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1) p_1(X(t_1)) dx(t_1)$$

Où $p_1(X(t_1))$ est la densité de probabilité du 1^{er} ordre de la variable aléatoire $X(t_1)$.

On peut les moments d'ordre supérieur par :

$$[\overline{X}(t_1)]^n = E[X(t_1)]^n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n(t_1) p_1(x(t_1)) dx(t_1)$$

V.2.2. Définition de la moyenne : On appelle moyenne (ou moment d'ordre 1), la quantité suivante :

$$m_x = E(X) = \sum_{k=0}^n x_k P(X = x_k), \text{ cas discret}$$

$$m_x = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x P(x) dx, \text{ cas continu}$$

V.2.3. Définition de la variance : On appelle variance (ou moment d'ordre 2), la quantité suivante:

$$\begin{aligned} V(x) = \sigma_x^2 = E[(X - m_x)^2] &= \sum_{k=0}^n (x_k - E(X))^2 P(X = x_k) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 f(x) dx \end{aligned}$$

N.B : $V(x) = E[(X - m_x)^2] = E[X^2] - m_x^2$

V.3. Fonction d'autocorrélation d'un processus aléatoire :

Considérons un processus aléatoire $X(t)$ à 2 instants t_1 et t_2 . C'est-à-dire considérons le couple de variable aléatoire qui prend les valeurs :

$$X(t_1) \begin{cases} X_1(t_1) \\ X_2(t_1) \\ X_3(t_1) \\ X_4(t_1) \end{cases} \quad X(t_2) \begin{cases} X_1(t_2) \\ X_2(t_2) \\ X_3(t_2) \\ X_4(t_2) \end{cases}$$

Le moment d'ordre 2, appelé fonction covariance ou fonction d'autocorrélation est donné par :

$$E[X(t_1)X(t_2)] = m_2(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = K_X(t_1, t_2)$$

Où $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$ est la densité de probabilité du couple de variables aléatoires $[X(t_1), X(t_2)]$.

La fonction d'autocorrélation $K_X(t_1, t_2)$ caractérise la dépendance entre les valeurs prises par le même processus aléatoire au deux instants t_1 et t_2 .

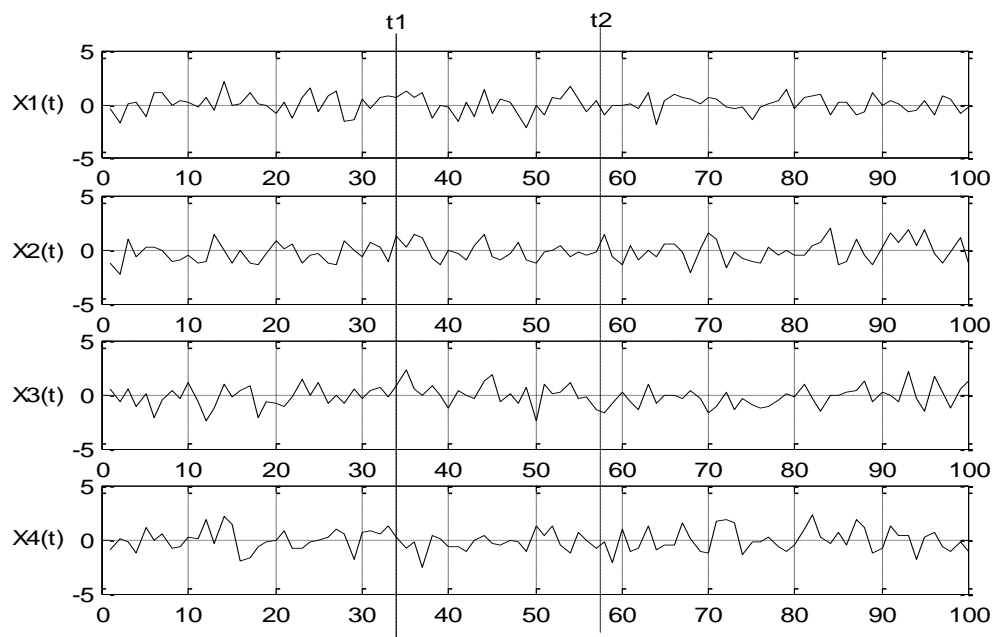


Figure 2

En effet supposant nous mesurons la ressemblance entre $X(t_1)$ et $X(t_2)$. En considérant l'erreur quadratique moyenne de la différence ε :

$$\varepsilon = |X(t_1) - X(t_2)|$$

$$E[\varepsilon^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1 - x_2|^2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_2^2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2
 \end{aligned}$$

Prenant le cas d'un bruit blanc normalement distribué (valeur moyenne nulle) $\Rightarrow E[X_1] = E[X_2] = 0$
Ce qui implique :

$$E[\varepsilon^2] = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 - 2K_X(t_1, t_2)$$

$\sigma_{X_1}^2$ et $\sigma_{X_2}^2$ sont deux quantités toujours positives.

On remarque que lorsque $\sigma_{X_1}^2, \sigma_{X_2}^2 > 0 \Rightarrow K_X(t_1, t_2)$ diminue alors $E[\varepsilon^2]$ augmente et moins les variables X_1 et X_2 se ressemblent.
Ainsi, la quantité $K_X(t_1, t_2)$ mesure bien la dépendance ou la corrélation entre X_1 et X_2 .

Plus généralement, pour un processus aléatoire complexe, on définit la fonction d'autocorrélation par :

$$K_{XX}(t_1, t_2) = E[X_1 X_2^*]$$

On peut généraliser cette notion de corrélation à un couple de processus aléatoire X et Y.
Avec :

$$K_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y^*(t_2)] = E[X_1 Y_2^*]$$

$$K_{YX}(t_1, t_2) = E[Y(t_1)X^*(t_2)] = E[Y_1 X_2^*]$$

K_{XY} et K_{YX} sont appelées fonction d'intercorrélation des processus X et Y.
Avec :

$$K = \begin{bmatrix} K_{XX}(t_1, t_2) & K_{XY}(t_1, t_2) \\ K_{YX}(t_1, t_2) & K_{YY}(t_1, t_2) \end{bmatrix}$$

On peut normaliser la fonction d'autocorrélation en posant :

$$\rho_{XX}(t_1, t_2) = \frac{E[(X_1 - m_{X_1})(X_2 - m_{X_2})]}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}}$$

La quantité $\rho_{XX}(t_1, t_2)$ est le coefficient de corrélation du processus aléatoire $X(t)$ aux instants t_1 et t_2 .

V.4. Processus aléatoire stationnaire :

Un processus aléatoire est stationnaire au sens strict si toutes les propriétés statistiques sont indépendante du temps, en particulier la moyenne :

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = m_1 \text{ est indépendante du temps}$$

La fonction d'autocorrélation $K_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$ ne dépend pas de t_1 et t_2 mais uniquement de la différence $\tau = t_1 - t_2$ et plus généralement tous les moments sont indépendants du temps.

Un processus aléatoire est stationnaire au sens large où au second ordre lorsque le caractère de stationnarité n'est vérifié que jusqu'au moment d'ordre 2.

V.5. Propriétés des fonctions de corrélation :

Propriété n°1

Soit $X(t)$ et $Y(t)$, deux processus aléatoires stationnaire et initialement stationnaire de seconde ordre, c'est-à-dire :

K_{XX}, K_{YY}, K_{YX} et K_{XY} sont des fonctions de τ seulement.

$$\begin{aligned} \text{Posons } t_0 = t - \tau \Rightarrow K_{XY}(\tau) &= E[X(t)Y^*(t - \tau)] = E[X(t_0 + \tau)Y^*(t_0)] \\ &= E[Y(t_0)X^*(t_0 + \tau)]^* \\ &= K_{YX}^*(-\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } K \text{ est réel alors } K_{XY}(\tau) &= K_{YX}(-\tau) \\ K_X(\tau) &= K_X(-\tau) \end{aligned}$$

Propriété n°2

$$K_X(0) \geq 0$$

En effet :

$$\begin{aligned} K_X(\tau) &= E[X(t)X^*(t - \tau)] \\ K_X(0) &= E[X(t)X^*(t)] = E[|X(t)|^2] \geq 0 \end{aligned}$$

Propriété n°3

$$|K_X(\tau)| \leq K_X(0)$$

Sachant :

$$|E[XY]| \leq \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}$$

Si X, Y sont les valeurs d'un même processus supposé stationnaire aux instants t et $t - \tau$, alors j'aurai :

$$|E[X(t)X(t-\tau)]| \leq \sqrt{E[X^2(t)]E[X^2(t-\tau)]} = \sqrt{E[X^2]E[X^2]} = E[X^2]$$

En conclusion, on peut dire que la fonction d'autocorrélation est toujours borné en module par sa valeur à l'origine.

Propriété n°4

La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation est toujours positive et nulle, $TF\{K_X(\tau)\} \geq 0$