Solution Exercice N°3 TD2 :

Déterminer et représenter la densité spectrale d'énergie $W_X(f)$ du signal $x(n)$ donné par:

$x(n) = a^n u(n)$ $|a| < 1$ u(n) représente l'échelon

$x(n)$ est absolument sommable En effet :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} < \infty$$

Ainsi la transformée de Fourier de $x(n)$ existe.

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi nf} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j2\pi nf} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j2\pi f})^n \rightarrow$$ C'est une suite géométrique

Ainsi :

$$X(f) = \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi f}}$$

La densité spectrale d'énergie $W_X(f)$ est donnée par :

$$W_X(f) = |X(f)|^2 = X(f)X^*(f) = \frac{1}{(1-ae^{-j2\pi f})(1-ae^{j2\pi f})}$$

Ce qui donne :

$$W_X(f) = \frac{1}{(1 - 2a\cos(2\pi f) + a^2)}$$

Puisque le signal $x(n)$ est réel, on peut vérifier que $W_X(-f)=W_X(f)$: c'est une symétrie paire.