Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou
Faculté de génie électrique et informatique
Département d'informatique

Année universitaire : 2015/2016
$2^{\text{ième}}$ année licence – Informatique
module : Logique Mathématique

Examen de Rattrapage

Le : 21/04/2016 – Durée 1h 30mn

Exercice 1 : (***4 pts***)

1) Dire, en justifiant, si les formules suivantes sont des tautologies ? si elles sont satisfiables ? ***(3 pts)***
   1-a) $(\neg A \vee \neg B) \to (A \wedge B)$
   1-b) $((A \to B) \wedge (B \to \neg B)) \to \neg A$
   1-c) $(((A \wedge B) \to C) \wedge \neg C) \to (A \to \neg B)$
2) Soit valid un algorithme qui répond vrai pour une formule P si la formule P est une tautologie et faux sinon.
   Peut-on utiliser l'algorithme valid pour tester si une formule du calcul propositionnel est satisfiable ou non ? Si oui dire comment, sinon dire pourquoi. ***(1 pt)***

Exercice 2 : (***5 pts***)

On considère le connecteur binaire | (barre de Sheffer) défini comme : $x \mid y = \neg (x \wedge y)$

1) Dire si le connecteur | est commutatif $(x \mid y \equiv y \mid x)$? et s'il est associatif $((x \mid y) \mid z \equiv x \mid (y \mid z))$? ***(1 pt)***
2) Donner les tables de vérité des formules $(x \mid x)$, $((x \mid x) \mid x)$ et $(x \mid y) \mid (x \mid y)$. ***(1 pt)***
3) Montrer que $\{|\}$ est un système complet de connecteurs. ***(1,5 pts)***
4) Définir par des équations récursives une fonction shef qui étant donnée une formule propositionnelle construite sur les connecteurs habituels, la transforme en une formule qui ne contient que des variables propositionnelles et la barre de Sheffer. ***(1,5 pts)***

Exercice 3 : (***9 pts***)

I) À l'aide de la méthode axiomatique, montrer ce qui suit :
   I-1) $\vdash (\neg A \to (\neg A \to A)) \to A$ ***(2 pts)***
   I-2) $\vdash \neg(A \to \neg B) \to A$ ***(1,5 pts)***
   I-3) $\vdash \neg(\neg(A \to \neg B) \to \neg C) \to A$ ***(1,5 pts)***

II) Soit CPF' le calcul propositionnel formel obtenu à partir de CPF en remplaçant l'axiome Ax3 par l'axiome Ax3' : $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$.
   À l'aide de la méthode axiomatique, montrer, dans CPF', ce qui suit :
   II-1) $\vdash \neg\neg B \to B$ ***(2 pts)***
   II-2) $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ ***(2 pts)***

N.B : Dans I), on peut utiliser les théorèmes et règles vus en cours ou en T.D sans avoir à les redémontrer.
Dans II), il faut redémontrer tout théorème ou règle utilisé(e).

Exercice 4 : (***2 pts***)

À l'aide de la résolution propositionnelle, montrer que la formule A est valide :

$$A = ((p \wedge q) \wedge (r \to \neg p)) \to (\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r) \quad \textit{(2 pts)}$$

Bon courage !

<u>Bref corrigé :</u> (Rattrapage de Log-Mat – L2 informatique – 2015/2016)

<u>Ex. **1** :</u>

1)

1-a) $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow (A \wedge B)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$A \wedge B$	1-a)
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1

D'après la table de vérité, la formule 1-a) n'est pas une tautologie mais elle est satisfiable.

1-b) $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \neg B)) \rightarrow \neg A$

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg B$	$B \rightarrow \neg B$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \neg B)$	$\neg A$	1-b)
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

D'après la table de vérité, la formule 1-b) est une tautologie, aussi, elle est satisfiable.

1-c) $(((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge \neg C) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \rightarrow C$	$\neg C$	$((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge \neg C$	$\neg B$	$A \rightarrow \neg B$	1-c)
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1

D'après la table de vérité, la formule 1-c) est une tautologie, aussi, elle est satisfiable.

2) Oui, car on a l'équivalence suivante : la formule A est insatifiable ssi la formule $\neg A$ est valide. Donc pour savoir si A est satisfiable on applique l'algorithme valid sur $\neg A$ pour tester si $\neg A$ est valide auquel cas auquel cas on déduit que A n'est pas satisfiable sinon on déduit que A est satisfiable.

Ex. **2** :

1) | est commutatif : $x \mid y = \neg(x \wedge y) = \neg(y \wedge x) = y \mid x$ pour tout x, y.

| n'est pas associatif : si $x = y = 0$ et $z = 1$ alors $x \mid y = 1$ donc $(x \mid y) \mid z = 0$; mais $y \mid z = 1$ et ainsi $x \mid (y \mid z) = 1$.

2)

x	x | x	(x |x) | x
0	1	1
1	0	1

x	y	x | y	(x | y) | (x | y)
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

3) Pour montrer que {|} est complet, il faut exprimer les connecteurs usuels en fonction du | :

$\neg x = x \mid x$

$x \wedge y = (x \mid y) \mid (x \mid y)$

$x \vee y = (x \mid x) \mid (y \mid y)$

$x \to y = x \mid (y \mid y)$

4) $\mathrm{shef}(x) = x$, où x est une variable propositionnelle

$\mathrm{shef}(\neg P) = (\mathrm{shef}(P) \mid \mathrm{shef}(P))$

$\mathrm{shef}(P \wedge Q) = (\mathrm{shef}(P) \mid \mathrm{shef}(Q)) \mid (\mathrm{shef}(P) \mid \mathrm{shef}(Q))$

$\mathrm{shef}(P \vee Q) = (\mathrm{shef}(P) \mid \mathrm{shef}(P)) \mid (\mathrm{shef}(Q) \mid \mathrm{shef}(Q))$

$\mathrm{shef}(P \to Q) = \mathrm{shef}(P) \mid (\mathrm{shef}(Q) \mid \mathrm{shef}(Q))$

où P et Q sont des formules propositionnelles quelconques.

Ex. **3** :

I)

I-1) 1. $\neg A \to (\neg A \to A)$ hyp

2. $(\neg A \to (\neg A \to A)) \to (\neg A \to A)$ thm f1, exo 14, série 2
3. $\neg A \to A$ MP + 1. + 2.
4. $(\neg A \to A) \to ((\neg\neg A \to A) \to A)$ thm g, exo 12, série 2
5. $(\neg\neg A \to A) \to A$ MP + 3. + 4.
6. $\neg\neg A \to A$ thm a, exo 12, série 2
7. A MP + 5. + 6.

On a $\neg A \to (\neg A \to A) \vdash A$; en appliquant le théorème de déduction, on obtient :

$\vdash (\neg A \to (\neg A \to A)) \to A$ C.Q.F.D

I-2) 1. $\neg A \to (A \to \neg B)$ thm c) exo 12 série 2

2. $(\neg A \to (A \to \neg B)) \to (\neg(A \to \neg B) \to \neg\neg A)$ thm e), exo 12, série 2
3. $\neg(A \to \neg B) \to \neg\neg A$ MP + 1. + 2.

4. $\neg\neg A \to A$ thm a), exo 12, série 2
5. $\neg(A \to \neg B) \to A$ Trans + 3. + 4.

D'où : $\vdash \neg(A \to \neg B) \to A$ C.Q.F.D

I-3) 1. $\neg(\neg(A \to \neg B) \to \neg C) \to \neg(A \to \neg B)$ thm I-2) de cet exercice
2. $\neg(A \to \neg B) \to A$ thm I-2) de cet exercice
3. $\neg(\neg(A \to \neg B) \to \neg C) \to A$ Trans + 1. + 2.

D'où : $\vdash \neg(\neg(A \to \neg B) \to \neg C) \to A$ C.Q.F.D

II) L'axiome Ax3' : $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$ remplace l'axiome Ax3 : $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ ce qui fait que l'on obtient le calcul propositionnel formel qu'on appelle CPF'.
Dans CPF' on a :

II-1) 1. $\neg\neg B \to (\neg B \to B)$ thm c), exo 12, série 2 (voir preuve ci-après)
2. $(\neg B \to \neg B) \to ((\neg B \to B) \to B)$ Ax3'
3. $\neg B \to \neg B$ thm 1), exo 11, série 2 (voir preuve ci-après)
4. $(\neg B \to B) \to B$ MP + 2. + 3.
5. $\neg\neg B \to B$ Trans + 1. + 4.

D'où $\vdash \neg\neg B \to B$ dans CPF'.   C.Q.F.D

Preuves des théorèmes utilisés :

- Trans :

1. $A \to B$ hypothèse
2. $B \to C$ hypothèse
3. $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$ Ax1
4. $A \to (B \to C)$ MP + 2. + 3.
5. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ Ax2
6. $(A \to B) \to (A \to C)$ MP + 4. + 5.
7. $A \to C$ MP + 1. + 6.

- thm 1), exo 11 :

1. $p \to ((p \to p) \to p)$ Ax1
2. $(p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$ Ax2
3. $((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$ MP + 1. + 2.
4. $p \to (p \to p)$ Ax1
5. $p \to p$ MP + 3. + 4.

- thm c), exo 12 :

1. $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ Ax1
2. $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ thm (Ax3 de CPF) dont la preuve est donnée en II-2)
3. $\neg A \to (A \to B)$ Trans + 1. + 2.

II-2) 1. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$ Ax3'

2. $((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B))$ Ax1
3. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B))$ Trans + 1. + 2.
4. $(A \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow B))$ Ax2
5. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow B))$ Trans + 3. + 4.
6. $(A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B))$ Perm + 5.
7. $A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ Ax1
8. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ MP + 6. + 7.

D'où : $\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ dans CPF' C.Q.F.D

Preuve de la permutation :

1. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ hyp
2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ Ax2
3. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ MP + 1. + 2.
4. $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ Ax1
5. $B \rightarrow (A \rightarrow C)$ Trans + 3. + 4.

<u>Ex. **4** :</u>

$A = ((p \wedge q) \wedge (r \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r)$

A est valide ssi $\neg A$ est insatisfiable.

$\neg A = ((p \wedge q) \wedge (r \rightarrow \neg p)) \wedge \neg(\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r)$

$= (p \wedge q \wedge (\neg r \vee \neg p)) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

L'ensemble des clauses associé à $\neg A$ est donc : $\{ p, q, \neg r \vee \neg p, \neg p \vee \neg q \vee r \}$.

Appliquons la résolution :

1. p
2. q
3. $\neg r \vee \neg p$
4. $\neg p \vee \neg q \vee r$
5. $\neg r$ Res(1,3)
6. $\neg p \vee \neg q$ Res(4,5)
7. $\neg p$ Res (2,6)
8. $\square$ Res(1,7)

D'où $\neg A$ est insatisfiable donc A est valide.

-------------------- <u>Fin du corrigé du Rattrapage de Log-Mat – L2 informatique – 2015/2016</u> --------------------