Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou
Faculté de génie électrique et informatique
Département d'informatique

Année universitaire : 2014/2015
L2 – Informatique
module : Logique Mathématique

Epreuve de Moyenne Durée

Le : 09/02/2015 – Durée 1h 30mn

Exercice **1** : (***4 pts***)

Soient les variables propositionnelles p = « je suis en retard », q = « j'ai un rendez-vous » et r = « je me dépêche ».

1) Représenter les énoncés suivants en logique propositionnelle :
   (a) Si je ne suis pas en retard, je ne me dépêche pas.
   (b) je ne me dépêche que si je suis en retard ou si j'ai un rendez-vous.
   (c) pour que je me dépêche il faut et il suffit que je sois en retard ou que j'aie un rendez-vous.
   (d) Soit je n'ai pas de rendez-vous, ou (exclusivement) alors je me dépêche.
2) Trouver deux conséquences logiques $x \vDash y$ où x et y sont parmi les propositions (a)..(d).

Exercice **2** : (***5 pts***)

Trois personnes, de nationalités différentes (marocaine, algérienne et tunisienne) et pratiquant des sports différents (football, natation et tennis), habitent dans trois maisons de couleurs distinctes (blanc, vert, rouge). Ces trois maisons sont situées dans la même rue ; une des maisons est située au début de la rue, une autre au milieu, et la troisième au bout de la rue. Chacune des 3 maisons est donc caractérisée par un quadruplet (E,C,N,S), où E est l'emplacement de la maison dans la rue, C la couleur de la maison, N et S la nationalité et le sport pratiqué par son occupant. On dispose des 5 indices suivants :

– Dans la maison verte on pratique la natation.
– La maison verte est située avant la maison de l'algérien.
– Le marocain habite la maison rouge.
– La maison rouge est située avant la maison où on pratique le football.
– Le tennisman habite au début de la rue.

Déterminer les caractéristiques de chacune des 3 maisons.

Exercice **3** : (***7 pts***)

1) Montrer la règle : $p \rightarrow (q \rightarrow r)\ ,\ r \rightarrow s\ \vdash\ p \rightarrow (q \rightarrow s)$
2) Soient la formule (a) $\equiv$ $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow C))$

2-a) Montrer, en utilisant le théorème de déduction, que la formule (a) est un théorème.

2-b) Montrer, maintenant, que (a) est un théorème ; et cela sans utiliser d'hypothèses.

Exercice **4** : (***4 pts***)

À l'aide de la résolution propositionnelle, montrer que $A \rightarrow D$ est une conséquence logique de la formule :

$F = (C \rightarrow (A \vee B)) \wedge (\neg D \rightarrow (A \vee C)) \wedge \neg ((B \rightarrow (A \vee D)) \rightarrow (A \wedge \neg D))$

Bon courage !

Bref corrigé : (E.M.D – L2 informatique – 2014/2015)

Ex. **1** :

1) (a) $\neg p \to \neg r$
   (b) $r \to (p \vee q)$
   (c) $r \leftrightarrow (p \vee q)$
   (d) $(\neg q \wedge \neg r) \vee (q \wedge r)$

2) On a $x \vDash y$ ssi $\vDash x \to y$.
   Une première conséquence logique (c) $\vDash$ (b) ; une seconde : (a) $\vDash$ (b). En effet :

p	q	r	$(p \vee q)$	(a)	(b)	(c)	$c \to b$	$a \to b$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Ex. **2** :

Chaque maison est représentée ici par un quadruplet (N, C, P, S) où N représente le numéro dans la rue ($N \in \{1, 2, 3\}$), C la couleur ($C \in$ {blanc, rouge, vert}), P le pays d'origine ($P \in$ {marocain, algérien, tunisien}) et S le sport pratiqué ($S \in$ {football, natation, tennis}). Ainsi, les 5 indices peuvent s'écrire :

– Dans la maison verte on pratique la natation : (n1, vert, p1, natation)
– La maison verte est située avant la maison de l'algérien : (n2, c2, algérien, s2) avec $n1 < n2$
– Le marocain habite la maison rouge : (n3, rouge, marocain, s3)
– La maison rouge est située avant la maison où on pratique le football : (n4, c4, p4, football) avec $n3 < n4$
– Le tennisman habite au début de la rue : (1, c5, p5, tennis)

Des indices 1 et 5, on déduit : $n1 \neq 1$. De l'indice 2, on déduit alors $n1 = 2$ et $n2 = 3$; d'où :
(1, c5, p5, tennis), (2, vert, p1, natation), (3, c2, algérien, s2)
De l'indice 4, on peut maintenant affirmer que $n4 = 3$ et donc que s2 = s4 = football ; d'où :
(1, c5, p5, tennis), (2, vert, p1, natation), (3, c2, algérien, football)
De l'indice 3, on déduit que la seule possibilité qui reste pour le marocain est la maison 1 :
(1, rouge, marocain, tennis), (2, vert, p1, natation), (3, c2, algérien, football)
Enfin de l'indice 2, p1 $\neq$ algérien or p1 $\neq$ marocain, on en déduit la solution :
(1, rouge, marocain, tennis), (2, vert, tunisien, natation), (3, blanc, algérien, football)

Ex. **3** :

1)

1. $p \to (q \to r)$ hyp.
2. $r \to s$ hyp.
3. $q \to (r \to s)$ Intro. + 2.
4. $(q \to (r \to s)) \to ((q \to r) \to (q \to s))$ Ax2
5. $(q \to r) \to (q \to s)$ MP + 3. + 4.
6. $p \to (q \to s)$ Trans. + 1. + 5.

   CQFD.

2)

2-a)

1. $A \to (B \to C)$ hyp.
2. $A \to ((A \to (B \to C)) \to B)$ hyp.
3. A hyp.
4. $(A \to (B \to C)) \to B$ MP + 2. + 3.
5. B MP + 1. + 4.
6. $B \to C$ MP + 1. + 3.
7. C MP + 5. + 6.

En appliquant trois fois le théorème de déduction on obtient la formule (a).

2-b)

1. $((A \to (B \to C)) \to B) \to ((B \to C) \to B)$ thm f2, exo 14, série 2
2. $A \to (((A \to (B \to C)) \to B) \to ((B \to C) \to B))$ Intro. + 1.
3. $(A \to (((A \to (B \to C)) \to B) \to ((B \to C) \to B))) \to$
   $((A \to (((A \to (B \to C)) \to B))) \to (A \to ((B \to C) \to B)))$ Ax2
4. $(A \to (((A \to (B \to C)) \to B))) \to (A \to ((B \to C) \to B))$ MP + 2. + 3.
5. $(A \to ((B \to C) \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to B))$ Ax2
6. $((A \to (B \to C)) \to (A \to B)) \to ((B \to C) \to (A \to B))$ thm f2, exo 14, série 2
7. $(A \to ((B \to C) \to B) \to ((B \to C) \to (A \to B))$ Trans. + 5. + 6.
8. $(A \to (((A \to (B \to C)) \to B))) \to ((B \to C) \to (A \to B))$ Trans. + 4. + 7.
9. $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ thm 2, exo 11, série 2
10. $((B \to C) \to ((A \to B)) \to (((B \to C) \to (A \to B)) \to ((B \to C) \to (A \to C)))$ Ax2
11. $((B \to C) \to (A \to B)) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ MP + 9. + 10.
12. $(A \to (((A \to (B \to C)) \to B))) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ Trans + 8. + 11.
13. $((B \to C) \to (A \to C)) \to (A \to ((B \to C) \to (A \to C)))$ Ax1
14. $(A \to (((A \to (B \to C)) \to B))) \to (A \to ((B \to C) \to (A \to C)))$ Trans. + 12. + 13.
15. $(A \to ((B \to C) \to (A \to C))) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to (A \to C)))$ Ax2
16. $(A \to (((A \to (B \to C)) \to B))) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to (A \to C)))$ Trans + 14. + 15.
17. $(A \to (A \to C)) \to (A \to C)$ thm f1, exo 14, série 2
18. $(A \to (((A \to (B \to C)) \to B))) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$ règle 1) de cet exercice + 16. + 17.
19. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to (((A \to (B \to C)) \to B))) \to (A \to C))$ Perm. + 18.

    CQFD.

Ex. **4** :

$(A \to D)$ est une conséquence logique de F ssi $(F \to (A \to D))$ est une tautologie ; ou bien sa négation $(F \wedge A \wedge \neg D)$ est insatisfiable.

$F \wedge A \wedge \neg D = (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee C \vee D) \wedge (A \vee \neg B \vee D) \wedge (\neg A \vee D) \wedge A \wedge \neg D$

On a :

$C1 = A \vee B \vee \neg C$

$C2 = A \vee C \vee D$

$C3 = A \vee \neg B \vee D$

$C4 = \neg A \vee D$

$C5 = \neg D$

$C6 = A$

$C7 = \neg A$ Res(C4,C5)

$C8 = \square$ Res(C6,C7)

CQFD.