Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou
Faculté de génie électrique et informatique
Département d'informatique

Année universitaire : 2015/2016
2ième année licence – Informatique
module : Logique Mathématique

Epreuve de Moyenne Durée

Le : 15/02/2016 – Durée 1h 30mn – Documents non autorisés

Exercice **1** : (***4 pts***)

1) Montrer que la formule $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$ est logiquement équivalente à la formule $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$, où α, β et γ sont des variables propositionnelles quelconques.

2) On considère la formule $E = ((A \wedge B \wedge C) \rightarrow (A \leftrightarrow (\neg B \vee C)))$, dans laquelle A, B et C sont des variables propositionnelles.

Déterminer une formule logiquement équivalente à E, écrite sans autre symbole de connecteur que $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$.

Exercice **2** : (***4 pts***)

Dans une île vivent trois espèces d'habitants : les Purs (qui disent toujours la vérité), les Pires (qui mentent toujours) et les Versatiles (qui disent parfois la vérité et mentent d'autres fois, au gré de leur fantaisie). Chaque habitant de l'île est soit un Pur, soit un Pire, soit un Versatile. Un Pire ne peut épouser qu'une Pure, un Pur ne peut épouser qu'une Pire et enfin un Versatile ne peut épouser qu'une Versatile.

Un couple formé de Mr et Mme A font les déclarations suivantes :

Mr A : « Ma femme n'est pas Versatile » ;

Mme A : « Mon mari n'est pas Versatile ».

Que sont Mr et Mme A ?

Exercice **3** : (***6 pts***)

On présente le système d'axiomes de Lukasiewicz composé des trois axiomes suivants :

(Ax1') $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

(Ax2') $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$

(Ax3') $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

On dispose de plus de la règle de Modus Ponens (MP) : $A, (A \rightarrow B) \vdash B$

Montrer ce qui suit :

1) $(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C)$ *Trans*
2) $\vdash A \rightarrow A$
3) $\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ (pour cette question, on pourra utiliser le théorème de déduction)
4) $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Exercice **4** : (***6 pts***)

a, b, c et d sont quatre nombres entiers. On considère les quatre affirmations :

A1 : « b et c sont des entiers pairs. » ; A2: « c et d sont de même parité. » ;

A3 : « d ou b est impair. » et A4 : « c est pair. ».

1) À l'aide de la résolution propositionnelle, montrer que {A1, A2, A3, A4} est contradictoire. ***(4 pts)***
2) Si parmi les quatre affirmations, une seule est fausse ; laquelle qui ne doit pas l'être ? ***(2 pts)***

Bon courage !

Bref corrigé : (E.M.D de Log-Mat – L2 informatique – 2015/2016)

Ex. **1** :

1) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma \equiv \neg(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma \equiv \neg\alpha \vee (\beta \rightarrow \gamma) \equiv \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$

2) $E = ((A \wedge B \wedge C) \rightarrow (A \leftrightarrow (\neg B \vee C)))$

$E \equiv ((A \wedge B \wedge C) \rightarrow (A \leftrightarrow (B \rightarrow C)))$

$E \equiv ((A \wedge B) \rightarrow (C \rightarrow (A \leftrightarrow (B \rightarrow C)))) \equiv (A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow (A \leftrightarrow (B \rightarrow C)))))$ d'après 1).

Ex. **2** :

Examinons les différents cas de figures qui peuvent avoir lieu : Mr A peut être soit un Pur, un Pire ou un Versatile.

- Si Mr A est Pur : alors sa femme est Pire donc ce qu'elle dit est faux ; par conséquent son mari est Versatile ce qui engendre une contradiction.
- Si Mr A est Pire : alors sa femme est Pure ; ce que dit Mr A est faux, par conséquent Mme A est Versatile : ça engendre aussi une contradiction.
- Si Mr A est Versatile : alors sa femme est aussi Versatile ; ici les deux déclarations de Mr et Mme A sont toutes les deux fausses, ce qui est possible à cause de la versalité de Mr et Mme A : pas de contradiction.

En conclusion Mr et Mme A sont tous les deux Versatiles.

Ex. **3** :

On doit montrer la règle 1) et les théorèmes 2), 3) et 4) dans le système d'axiomes de Lukasiewicz donné dans l'énoncé :

1) $(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C)$ *Trans*

1. $A \rightarrow B$ hyp
2. $B \rightarrow C$ hyp
3. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ Ax3'
4. $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ MP + 1. + 3.
5. $A \rightarrow C$ MP + 2. + 4. C.Q.F.D

2) $\vdash A \rightarrow A$

1. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$ Ax1'
2. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ Ax2'
3. $A \rightarrow A$ *Trans* + 1. + 2. C.Q.F.D

3) $\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

1. $(\neg A \rightarrow \neg B)$ hyp
2. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A))$ Ax3'
3. $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$ MP + 2. + 1.
4. $B \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ Ax1'
5. $B \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$ *Trans* + 3. + 4.
6. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ Ax2'
7. $B \rightarrow A$ *Trans* + 5. + 6.

On a : $(\neg A \to \neg B) \vdash (B \to A)$; pour conclure, on utilise le théorème de déduction et on obtient le théorème : $\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ C.Q.F.D

4) $\vdash A \to (B \to A)$

1. $A \to (\neg A \to \neg B)$ Ax1'
2. $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ le 3) de cet exercice
3. $A \to (B \to A)$ *Trans* + 1. + 2. C.Q.F.D

Ex. **4** :

1) Soit A = « a est pair », B = « b est pair », C = « c est pair » et D = « d est pair ».

On peut écrire les affirmations Ai, i=1..4 comme suit :

$A1 = B \wedge C$; $A2 = (C \wedge D) \vee (\neg C \wedge \neg D)$

$A3 = (\neg B \vee \neg D)$; $A4 = C$.

On a : {A1, A2, A3, A4} est contradictoire ssi $A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge A4 \vDash \square$

A1 engendre deux clauses : B et C ;

A2, après transformation, engendre les clauses : $C \vee \neg D$ et $D \vee \neg C$;

A3 engendre la clause : $\neg B \vee \neg D$;

A4 engendre C.

En appliquant la résolution propositionnelle, on aura :

$C1 = B$

$C2 = C$

$C3 = C \vee \neg D$

$C4 = \neg C \vee D$

$C5 = \neg B \vee \neg D$

$C6 = C$

$C7 = \neg D$ Res(C1,C5)

$C8 = \neg C$ Res(C4,C7)

$C9 = \square$ Res(C2,C8)

CQFD.

2) Une seule parmi les quatre affirmations est fausse ;

- si A1 est fausse : b est impair (car d'après A4 c est pair), et d est pair ; il n'y a pas de contradiction.
- Si A2 est fausse : d est impair (car d'après A4 c est pair), et b est pair ; il n'y a pas de contradiction.
- Si A3 est fausse : b et d sont pairs, et c aussi ; il n'y a pas de contradiction.
- Si A4 est fausse alors même A1 devient fausse, ce qui est une contradiction car une seule affirmation seulement est fausse.

En conclusion, A4 ne doit pas être fausse.

---------------------- Fin du corrigé de l'EMD de Log-Mat – L2 informatique – 2015/2016 ----------------------