EMD1 (S3) 2011-2012 **Niveau** : 2LMD-IA **Module** : Logique mathématique

---

Exercice 1 : (4 points) Soient a, b et f des fbf du calcul propositionnel tel-que $f = (a \land \neg b) \lor \neg a$

1. Construire la table de vérité pour le formule « f » ?
2. La formule « f » est-elle satisfiable ? Justifier votre réponse ?
3. Montrer que la formule « f » n'est pas une tautologie ?

Exercice 2 : (5 points) Soit f une fbf du calcul propositionnel

Calculer les formules B1, B2, B3, B4, et B5 équivalentes à la formule f ?

$F = ((a \lor c) \to b) \land (c \lor (\neg b \to c))$

Exercice 3 : (8 points) soit A est une fbf du calcul des prédicats du premier ordre

$$A = \forall x \exists y\, P(x,f(y)) \to \forall x1 (Q(x,a) \to R(x1))$$

1. Quelles sont les variables liées et les variables libres dans la formule A ?
2. Trouver A^s ?

Exercice 4 : (3 points) $\{ (t \to (r \to p)), (p \to (r \to t)), q, r, (p \to (q \to \neg r)) \} \models (q \to t)$?

Bon courage

EMD1 (S3) 2011-2012 **Niveau** : 2LMD-IA **Module** : Logique mathématique

Corrigé + barème

Exercice 1 : Soient a, b et f des fbf du calcul propositionnel tel-que $f = (a \wedge \neg b) \vee \neg a$

1- Table de vérité de la formule « f »

a	b	¬b	¬a	(a∧¬b)	F
1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1

1

1 2- La formule « f » est satisfiable car pour l'interprétation I(a) = 1 et I(b) = 0 , I(f) = 1 (deuxième ligne de la table de vérité).

2 3- $\models f \Rightarrow \forall$ I une interprétation I(f) = 1 alors que la 1ère ligne de la table de vérité $\cancel{I(f)}$ = 0 donc $\models f$

Exercice 2 : Soit f une fbf du calcul propositionnel

$$\begin{aligned} F &= ((a\vee c)\rightarrow b)\wedge(c\vee(\neg b\rightarrow c)) \\ &= (\neg(a\vee c)\vee b)\wedge(c\vee(b\vee c)) \\ &= (\neg(a\vee c)\vee b)\wedge(c\vee b\vee c) \\ &= (\neg(a\vee c)\vee b)\wedge(c\vee b) \\ B1 &= \neg(\neg(\neg(a\vee c)\vee b)\vee\neg(c\vee b)) \end{aligned}$$
1

$$\begin{aligned} F &= (\neg(a\vee c)\vee b)\wedge(c\vee b) \\ &= ((\neg a\wedge\neg c)\vee b)\wedge(c\vee b) \\ &= ((\neg a\vee b)\wedge(\neg c\vee b))\wedge(c\vee b) \\ B4 &= (\neg a\vee b)\wedge(\neg c\vee b)\wedge(c\vee b) \end{aligned}$$
1

$$\begin{aligned} F &= (\neg(a\vee c)\vee b)\wedge(c\vee b) \\ &= ((\neg a\wedge\neg c)\vee b)\wedge\neg(\neg c\wedge\neg b) \\ B2 &= \neg(\neg(\neg a\wedge\neg c)\wedge\neg b)\wedge\neg(\neg c\wedge\neg b) \end{aligned}$$
1

$$\begin{aligned} F &= (\neg(a\vee c)\vee b)\wedge(c\vee b) \\ &= (\neg(a\vee c)\wedge(c\vee b))\vee(b\wedge(c\vee b)) \\ &= ((\neg a\wedge\neg c)\wedge(c\vee b))\vee((b\wedge c)\vee(b\wedge b)) \\ &= ((\neg a\wedge\neg c\wedge c)\vee(\neg a\wedge\neg c\wedge b))\vee((b\wedge c)\vee(b\wedge b)) \\ &= ((\neg a\wedge\cancel{\neg c\wedge c})\vee(\neg a\wedge\neg c\wedge b))\vee((b\wedge c)\vee b) \\ &= ((\neg a\wedge\neg c\wedge b))\vee((b\wedge c)\vee b) \\ B5 &= (\neg a\wedge\neg c\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee b \end{aligned}$$
1

$$\begin{aligned} F &= ((a\vee c)\rightarrow b)\wedge(c\vee(\neg b\rightarrow c)) \\ &= ((\neg a\rightarrow c)\rightarrow b)\wedge(\neg c\rightarrow(\neg b\rightarrow c)) \\ &= \neg(\neg((\neg a\rightarrow c)\rightarrow b)\vee\neg(\neg c\rightarrow(\neg b\rightarrow c))) \\ B3 &= \neg(((\neg a\rightarrow c)\rightarrow b)\rightarrow\neg(\neg c\rightarrow(\neg b\rightarrow c))) \end{aligned}$$
1

Exercice 3 : $A = \forall x\exists y\, P(x,f(y)) \rightarrow \forall x1(Q(x,a) \rightarrow R(x1))$

1. Varliée(A)={x,y,x1} , Varlib(A)={x} 2
2. Calcul de A^s

4 2-a) Forme prénexe de A

$A = \forall x\exists y\, P(x,f(y)) \rightarrow \forall x1(Q(x,a) \rightarrow R(x1))$

$= \forall z\exists y\, P(z,f(y)) \rightarrow \forall x1(Q(x,a) \rightarrow R(x1))$ …... (changement de la variable liée X)

$= \exists z\forall y\, (P(z,f(y)) \rightarrow \forall x1(Q(x,a) \rightarrow R(x1)))$ …(remonter des variables z et y)

$= \exists z\forall y\forall x1\, (P(z,f(y)) \rightarrow (Q(x,a) \rightarrow R(x1)))$ …(remonter de la variable x1)

2-b) Forme Skolem de A (A^s)

2 $A = \exists z\forall y\forall x1\, (P(z,f(y)) \rightarrow (Q(x,a) \rightarrow R(x1)))$

$A^s = \forall y\forall x1\, (P(a,f(y)) \rightarrow (Q(x,a) \rightarrow R(x1)))$ ….. (remplacer la variable z par la constante a)

Exercice 4 : $\{ (t\rightarrow(r\rightarrow p)), (p\rightarrow(r\rightarrow t)), q, r, (p\rightarrow(q\rightarrow\neg r)) \} \models (q\rightarrow t)$

1

$\{(t\rightarrow(r\rightarrow p)), (p\rightarrow(r\rightarrow t)), q, r, (p\rightarrow(q\rightarrow\neg r))\} \models (q\rightarrow t)$

$\{(t\rightarrow(r\rightarrow p)), (p\rightarrow(r\rightarrow t)), q, r, (p\rightarrow(q\rightarrow\neg r))\} \vdash (q\rightarrow t)$

$\{(t\rightarrow(r\rightarrow p)), (p\rightarrow(r\rightarrow t)), q, r, (p\rightarrow(q\rightarrow\neg r)), q\} \vdash t$

$\{(t\rightarrow(r\rightarrow p)), (p\rightarrow(r\rightarrow t)), q, r, (p\rightarrow(q\rightarrow\neg r)), q, \neg t\} \vdash \square$

1

$(t\rightarrow(r\rightarrow p)) = \neg t\vee\neg r\vee p$

$(p\rightarrow(r\rightarrow t)) = \neg p\vee\neg r\vee t$

q

r

$(p\rightarrow(q\rightarrow\neg r)) = \neg p\vee\neg q\vee\neg r$

1