Université A. Mira-Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques / MI

Mercredi 6 juillet 2011

Examen d'Analyse 1

Exercice 1. *(07 points) : :*
On considère deux suites numériques $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$\begin{cases} U_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2} \\ V_{n+1} = \frac{2U_n.V_n}{U_n+V_n} \end{cases} \quad \text{avec } 0 < V_0 < U_0$$

1. *Montrer par récurrence que :* $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < V_n < U_n$
   (Indication : Utiliser la relation $(U_n - V_n)^2 \geq 0$*)*
2. *Montrer que* (U_n) *est strictement décroissante et* (V_n) *est strictement croissante.*
3. *En déduire la convergence des suites* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. *On pose* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l'$, *montrer que* $l = l'$.
5. (a) *Vérifier que* $U_{n+1}.V_{n+1} = U_n.V_n\,, \forall n \in \mathbb{N}$ *; en déduire que la suite* $(U_n\,.\,V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante.*
   (b) *En déduire la valeur de* $l = l'$.

Exercice 2. *(05 points) :*
Soit f *la fonction définie par :*

$$f(x) = \frac{e^x.\cos x - 1}{x}\,, \forall x \in \mathbb{R}^*$$

1. *Ecrire le développement limité à l'ordre* 3 *au voisinage de* 0 *de la fonction* f.
2. *En déduire* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
3. (a) *Montrer que* f *est prolongeable par continuité sur* $\mathbb{R}$
   (b) *Soit* $\tilde{f}$ *le prolongement par continuité de* f, *étudier la dérivabilité de* $\tilde{f}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 3. *(04 points) :*
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^4+1} - (ax^2+b) + \frac{1-\cos c.x}{x^2} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

1. *Si* $a \neq 1$, *montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$.

2. *Si* $a = 1$, *determiner les valeurs de* b *et* c *pour que* f *soit continue sur* $\mathbb{R}$ *et* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -3$.

Exercice 4. *(04 points) :*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $a < b$. *Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $f(a) = a$, $f(b) = b$ *et soit* $g : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ *une fonction continue.*
Montrer qu'il $\exists c \in [a, b]$ *telle que* $f(c) = g(c)$
(Indication : Considérer la fonction h *définie par* $h(x) = f(x) - g(x)$, $\forall x \in [a, b]$*).*