Département d'informatique Année 2007/2008
Logique Mathématique **Corrigé du Contrôle**

1/ Calcul Propositionnel : **(3 points)**

A/ Pour quelles valeur de n l'expression suivante est-elle vraie :
(n=1) → (n=2).

Il suffit de dresser le tableau de vérité du connecteur conditionnel (A → B) ; Ainsi il faut que $\neg$A soit vrai ou B soit vrai. Donc il faut que A soit faut ou B soit vrai. Ainsi , pour que l'expression (n=1) → (n=2) soit vraie il faut que n soit différent de 1 et égal à 2. *(1.5 points)*

B/ Mettre sous forme normale disjonctive la formule suivante :
$((\neg p \vee r) \rightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$.

En construisant le tableau de vérité, on trouve :

p	q	r	$\neg p \vee r$	$(\neg p \vee r) \rightarrow q$	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \rightarrow r)$	$((\neg p \vee r) \rightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	F	F
V	F	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	F
F	F	F	V	F	F	V	F

Ainsi , en appliquant la règle de construction à partir du tableau de vérité disjonction de la conjonction des littéraux où les lignes son vraies, on obtient : $p\wedge q\wedge r \vee p\wedge \neg q\wedge \neg r \vee \neg p\wedge q$.
(1.5 points)

2/ Déductions : **(4 points)**

A/ Démontrer le théorème suivant :
$\vdash (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$.

$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha \equiv \neg(\alpha \wedge \beta) \vee \alpha \equiv \neg((\alpha \wedge \beta) \wedge \neg\alpha)$.

Supposons donc que l'expression $(\alpha \wedge \beta) \wedge \neg\alpha$ est vrai**e ;**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\alpha \wedge \beta) \wedge \neg\alpha}{(\alpha \wedge \beta)}\,(\wedge E)}{\alpha}\,(\wedge E) \qquad \dfrac{(\alpha \wedge \beta) \wedge \neg\alpha}{\neg\alpha}\,(\wedge E)}{\neg[(\alpha \wedge \beta) \wedge \neg\alpha]}\,(\neg I)$$

Donc : $\vdash (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$. *(2 points)*

B/ Rappeler le théorème de complétude. Utilisez le pour démontrer le théorème suivant :
$\vdash (\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \vee \beta)$.

Théorème de complétude (Revoir le chapitre Déductions) ;

Pour démontrer que $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \vee \beta)$, en vertu du théorème de complétude, il suffit de démontrer que $\models (\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \vee \beta)$. Il faut donc construire le tableau de vérité.

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
V	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**F**	**V**

Donc $\models$ **$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \vee \beta)$**, ce qui, en revenant au théorème de complétude, permet de conclure que :

$\vdash$ **$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \vee \beta)$.**

(2 points)

***3/ Récursivité :* (3 points)**

A/ La fonction f suivante est elle primitive récursive ?

f : N → N

n → Reste(n/3)

Il faut commencer par remarquer que la fonction

$$\text{Reste}(n/3) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 3m \\ 1 & \text{si } n = 3m+1 \\ 2 & \text{si } n = 3m+2 \end{cases}$$

$$\text{Donc } f(n) = \begin{cases} 0 = Z(n) \\ 1 = S(Z(n)) \\ 2 = S(S(Z(n))) \end{cases}$$

On remarque donc que f(n) est soit une fonction de base ou la composée de deux fonctions de base ou la composée de la composée de deux fonctions de base, donc c'est une fonction primitive récursive.

(1.5 points)

B/ L'ensemble des nombres impairs divisibles par 3 est-il récursif.

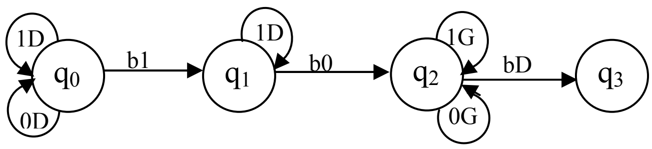
En fait, cet ensemble est l'ensemble des nombres entiers dont le reste de la division par 3 est nul et qui ne soient pas pairs.

Il suffit de définir la fonction (reste de la division de n par 3) comme étant la fonction caractéristique de l'ensemble des nombres impairs divisibles par 3. Il est ainsi très facile de démontrer que cette fonction est primitive récursive, d'où l'ensemble des nombres impairs divisibles par 3 est récursif.

(1.5 points)

***4/ Machines de Turing :* (4 points)**

A/ On se donne la machine de Turing MT_1 (S_1, E_1, I_1) définie par le graphe suivant:



Sachant que S_1={0, 1, b}, E_1={q_0, q_1, q_2, q_3}.

Trouver la fonction de N dans N calculée par cette machine de Turing, sachant que cette fonction est de la forme : n → an+b, n étant représenté en binaire.

Remarque : la tête de lecture est positionnée sur le 0 ou 1 le plus à gauche, les nombres sont représentés en binaire. Prenez les exemples 4 et 7.

En exécutant la machine sur l'exemple 4(100) la machine positionne la tête à la fin du ruban et rajoute 10 on obtient donc (10010) donc c'est la représentation binaire du nombre 18.

En exécutant la machine sur l'exemple 7(111) la machine positionne la tête à la fin du ruban et rajoute 10 on obtient donc (11110) donc c'est la représentation binaire du nombre 30.

La fonction calculée étant de la forme an+b, on a donc :

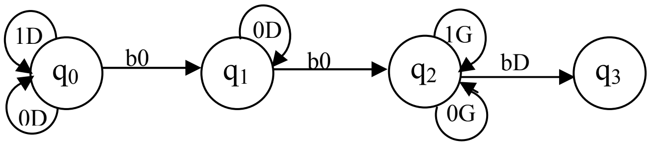
$$\begin{cases} 4a + b = 18 \\ 7a + b = 30 \end{cases}$$

En résolvant le système d'équations, on obtient a=4 et b=2, d'où la fonction calculée par la machine de Turing est : f(n) = 4n + 2. *(1.5 points)*

B/ - En vous inspirant sur la machine de Turing précédente, proposer une machine de Turing qui calcule la fonction suivante :

f : N → N
n → 4n

En fait, la multiplication du nombre n par 4 (100 en binaire), revient à rajouter deux 0 à la fin du nombre.
Il suffit donc de reprendre la même machine en remplaçant l'instruction q_0 b1 q_1 par l'instruction q_0 b0 q_1, et l'instruction q_1 1D q_1 par l'instruction q_1 0D q_1 , on obtient donc la machine suivante :



(1.5 points)

- Est-elle récursive ?

La fonction f(n)=4n est récursive, puisqu'elle est calculable par la machine de Turing ci-dessus.
(1 point)

***<u>5/ Calcul des Prédicats :</u>* <u>(6 points)</u>**

A/ Souligner les variables libres et entourer les variables liées en indiquant par une flèche le connecteur auquel elles sont associées.

1. **$\exists x\ A(x, y) \land B(x)$.**
2. **$\exists x\ (A(x, y) \land B(x))$.**
3. **$\exists x\ \exists y\ (A(x, y) \rightarrow B(x))$.**
4. **$\forall x\ \forall y\ (A(x, y) \land B(y)) \rightarrow \exists w\ C(x,w)$.**
5. **$\forall x\ (\forall w\ (A(x, y) \land B(w)) \rightarrow \exists y\ C(x,y))$.**

1. $\exists x\ A(x, \underline{y}) \land B(\underline{x})$.
2. $\exists x\ (A(x, \underline{y}) \land B(x))$.
3. $\exists x\ \exists y\ (A(x, y)) \rightarrow B(x))$. *(3 points)*
4. $\forall x\ \forall y\ (A(x, y) \land B(y)) \rightarrow \exists w\ C(\underline{x}, w)$.
5. $\forall x\ (\forall w\ (A(x, \underline{y}) \land B(w)) \rightarrow \exists y\ C(x, y))$.

B/ Exprimer les phrases suivantes

1. **Certains politiciens sont honnêtes**
   ∃x politicien(x) → honnête(x)
2. **Si tous les hommes sont mortels alors Socrates est mortel.**
   (∀ **x** homme **(x)** ∧ mortel**(x))** → mortel(Socrates)
3. **Tout le monde cherche quelque chose mais tout le monde ne le trouve pas**
   ∀ x (∃y (Chercher(x , y) ∧ ⌉trouver (x , y)))
4. **Tous les malades consultent un médecin.**
   ∀ x (malade(x) → consulter un médecin(x))
5. **Si les enfants font du bruit alors le maître les puni.** *(3 points)*
   ∀ x (enfant(x) ∧ **faire du bruit(x)** → punir(maître, x))