Epreuve EMD1 (S3)
Niveau : 2LMD
Module : Logique mathématique

Exercice 1 : On introduit une nouvelle constante logique $\perp$ (falsum, absurde, ou encore bottom), un connecteur à 0 argument, tel que pour toute distribution de valeur de vérité v, $v(\perp) = 0$ par définition. Montrer que dans ce cas on a:

$$\models (\varphi \rightarrow \perp) \leftrightarrow \neg\varphi$$

Exercice 2 : Soient F, G, H trois formules propositionnelles. Alors prouver que $F \rightarrow H$ est déduite à partir de $\{F \rightarrow G, G \rightarrow H\}$:

Exercice 3 : quelles sont les variables liées et libres dans la formule A, et calculer $(x \backslash f(x1,h(y)))A$

$$A = \forall x \exists y\, P(x,f(y)) \rightarrow \forall x1 (Q(x,a) \rightarrow R(x1))$$

Exercice 4 : on utilisant la RSV (résolution sans variables) montrer que

$$\{(r \wedge t) \rightarrow p,\ q,\ r,\ (p \wedge r) \rightarrow t,\ q \rightarrow t\} \models (p \wedge q \wedge r)$$

Exercice 5 : Soit la fbf suivante $F1 = \neg(\forall x\, p(x,a) \rightarrow \exists y \forall x\, (r(x) \wedge q(y,x)))$

a) F2 est la forme prenexe de F1
b) F3 est la forme de conjonction de clauses de F2
c) F4 est la forme Skolem de F3
d) S_{F1} est le système de Herbrand associé à {F1}

Calculer F2, F3, F4 et S_{F1}

Bon courage

Correction EMD logique mathématique 2ième LMD

Exercice 1

φ	$(\varphi \to \perp)$	$\neg\varphi$	$(\varphi \to \perp) \leftrightarrow \neg\varphi$
1	0	0	1
0	1	1	1

Exercice 2

F1 : $G \to H$ …………………………………....... (hypothèse)
F2 : $(G \to H) \to (F \to (G \to H))$ ……………… … (Axiom A1)
F3 : $F \to (G \to H)$ ……………………………….. (mp à partir de F1 et F2)
F4 : $(F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$ …. … (Axiom A2)
F5 : $(F \to G) \to (F \to H)$ …………………………. (mp à partir de F3 et F4)
F6 : $F \to G$ ………………………………………. (hypothèse)
F7 : $F \to H$.

Exercice 3 : $(x\backslash f(x1,h(y)))A$

$A = \forall x \exists y\, P(x,f(y)) \to \forall x1(Q(x,a) \to R(x1))$

Varlib = {x}
Varliée = {x,y,x1}

$A = \forall w \exists u\, P(w,f(u)) \to \forall z(Q(x,a) \to R(z))$
$(x\backslash f(x1,h(y)))A = \forall w \exists u\, P(w,f(u)) \to \forall z(Q(f(x1,h(y)),a) \to R(z))$

Exercice 4 :

$$S = \{(r \wedge t) \to p,\ q,\ r,\ (p \wedge r) \to t,\ q \to t\} \models (p \wedge q \wedge r)$$

étape1 : mettre les formules de S sous forme de clauses

$(r \wedge t) \to p \equiv \neg (r \wedge t) \vee p \equiv \neg r \vee \neg t \vee p$
$(p \wedge r) \to t \equiv \neg (p \wedge r) \vee t \equiv \neg p \vee \neg r \vee t$
$q \to t \equiv \neg q \vee t$

étape 2 : par application du théorème de la consistance alors $S' = S \cup \{\neg(p \wedge q \wedge r)\}$ est inconsistant

$\neg(p \wedge q \wedge r) \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r$

étape 3 : $S' = \{p \vee \neg r \vee \neg t,\ q,\ r,\ t \vee \neg p \vee \neg r,\ t \vee \neg q,\ \neg p \vee \neg q \vee \neg r\} \models \vee$

$p \vee \neg r \vee \neg t$ r q $t \vee \neg p$

$p \vee \neg t$ t

p $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$

r $\neg q \vee \neg r$

q $\neg q$

$\vee$

étape 4 : donc la formule $(p \wedge q \wedge r)$ est déduite de S.

Exercice 5 : Soit la fbf suivante F1= $\neg(\forall x\, p(x,a) \rightarrow \exists y \forall x\, (r(x) \wedge q(y,x)))$

a) F2 est la forme prenexe de F1

$F2 = \neg(\neg \forall x\, p(x,a) \vee (\exists y \forall w\, (r(w) \wedge q(y,w))))$

$= (\forall x\, p(x,a) \wedge (\neg\exists y \forall w\, (r(w) \wedge q(y,w))))$

$= (\forall x\, p(x,a) \wedge \forall y \exists w\, (\neg r(w) \vee \neg q(y,w)))$

$= (\forall x\, p(x,a) \wedge \forall y \exists w\, (\neg r(w) \vee \neg q(y,w)))$

$= \forall x\, \forall y\, \exists w\, (p(x,a) \wedge (\neg r(w) \vee \neg q(y,w)))$

b) F3 est la forme de conjonction de clauses de F2

$F3 = F2 = \forall x\, \forall y\, \exists w\, (p(x,a) \wedge (\neg r(w) \vee \neg q(y,w)))$

Première clause = $p(x,a)$

Deuxième clause = $\neg r(w) \vee \neg q(y,w)$

c) F4 est la forme Skolem de F3

Pour la forme de skolem on remplace la variable w par la fonction f appliquée aux variables x,y quantifiées par $\forall$ et qui précédent $\exists w$ donc F4 = (w\f(x,y))F3

$F4 = \forall x\, \forall y\, (p(x,a) \wedge (\neg r(f(x,y)) \vee \neg q(y,f(x,y))))$

d) S_{F1} est le système de Herbrand associé à {F1}

Pour calculer S_{F1} :

1- $U_{herbrand} = \{a,b\}$
2- $Atome_{herbrand} = \{p(a,a), p(b,a), r(f(a,b)), r(f(b,a)), q(b,f(a,b)), q(a,f(b,a))\}$
3- $S_{F1} = \{ p(a,a), p(b,a), \neg r(f(a,b)) \vee \neg q(b,f(a,b)), \neg r(f(b,a)) \vee \neg q(a,f(b,a))\}$