Université A. Mira-Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques / MI

Mercredi 6 juillet 2011

Corrigé Examen d'Analyse 1

Exercice 1. *(07 points) :*
On considère deux suites numériques $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} U_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2} \\ V_{n+1} = \frac{2U_n.V_n}{U_n+V_n} \end{cases} \quad \text{avec } 0 < V_0 < U_0$$

1. *Montrons par récurrence que :* $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < V_n < U_n$
   Pour $n = 0$, *on a :* $0 < V_0 < U_0$ *vraie.*
   Supposons que : $0 < V_n < U_n$ *et montrons que :* $0 < V_{n+1} < U_{n+1}$
   On a $U_n > 0$ *et* $V_n > 0$ *alors* $V_{n+1} = \frac{2U_n.V_n}{U_n+V_n} > 0$
   (Produit, somme et rapport de nombres réels strictement positifs).
   D'autre part, on a : $(U_n - V_n)^2 \geq 0$. *Mais* $U_n \neq V_n$ *car sinon* $U_{n+1} = U_n$ *et* $V_{n+1} = V_n$ *et les deux suites seraient constantes.*
   Alors $(U_n - V_n)^2 > 0 \Leftrightarrow U_n^2 - 2U_n.V_n + V_n^2 > 0 \Leftrightarrow (U_n + V_n)^2 - 4U_n.V_n > 0$
   $\Leftrightarrow 4U_n.V_n) < (U_n + V_n)^2 \Leftrightarrow \frac{2U_n.V_n}{U_n+V_n} < \frac{U_n+V_n}{2}$, *d'où* $0 < V_{n+1} < U_{n+1}$
   Alors $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < V_n < U_n$
2. *Montrons que* (U_n) *et* (V_n) *sont strictements monotones.*
   On a : $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n+V_n}{2} - U_n = \frac{V_n-U_n}{2} < 0$ *car* $V_n < U_n$
   D'où U_n *est une suite strictement décroissante.*
   On a : $V_{n+1} - V_n = \frac{2U_n.V_n}{U_n+V_n} - V_n = \frac{(U_n-V_n).V_n}{U_n+V_n} > 0$ *car* $U_n - V_n > 0, V_n > 0$ et $U_n + V_n > 0$
   D'où V_n *est une suite strictement croissante.*
3. *Convergence des suites :*
   On a : $V_0 < V_1 < V_2 < \cdots < V_n < U_n < U_{n-1} < \cdots < U_0$
   Alors, U_n *est une suite décroissante minorée par* V_0
   Et, V_n *est une suite croissante majorée par* U_0.
   D'où, la convergence des deux suites (U_n) *et* (U_n).
4. *On pose* $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$ et $\lim_{n\to+\infty} V_n = l'$, *montrons que* $l = l'$.
   On a : $U_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2}$, *alors* $l = \frac{l+l'}{2}$, *on tire* $l = l'$.
5. (a) *Vérifions que* $U_{n+1}.V_{n+1} = U_n.V_n\ , \forall n \in \mathbb{N}$.
   On a $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1}.V_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2}.\frac{2U_n.V_n}{U_n+V_n} = U_n.V_n$.
   D'où, (par récurrence) : $U_{n+1}.V_{n+1} = U_n.V_n = U_{n+1}.V_{n+1} = \cdots = U_1.V_1 = U_0.V_0$.
   Alors la suite $(U_n\ .\ V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante.*

   (b) *De* $U_n.V_n = U_0.V_0$, *on a :* $l^2 = U_0.V_0$ on tire $l = \sqrt{U_0.V_0}$.

Exercice 2. *(05 points) :*
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{e^x.\cos x - 1}{x}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}^*$$

1. *Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f.*
   On a :
   $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$
   $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$
   Le produit :$e^x \cos x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4) =$
   Alors, le DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x) = \frac{e^x.\cos x - 1}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

2. *On a :* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) = 1.$
3. (a) *Montrons que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$*
   On a : f fonction continue sur $\mathbb{R}^*$ car f est le produit, somme et rapport de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$
   De plus, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1.$
   Alors, f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$

   (b) *Le prolongement de f est définie par :*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{e^x.\cos x - 1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

   $\tilde{f}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car $\tilde{f}$ est le produit, somme et rapport de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$
   De plus, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(-\frac{x}{3} - \frac{x^2}{6} + o(x^2)) = 0$ *d'où la dérivabilité de $\tilde{f}$ en 0 avec $\tilde{f}'(0) = 0$.*
   Conclusion :
   $\tilde{f}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

Exercice 3. *(04 points) :*
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^4 + 1} - (ax^2 + b) + \frac{1 - \cos c.x}{x^2} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

1. *Si $a \neq 1$, montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$.*

   On a : $f(x) = \sqrt{x^4+1} - (ax^2+b) + \frac{1-\cos c.x}{x^2} = x^2(\sqrt{1+\frac{1}{x^4}} - a) - b + \frac{1-\cos c.x}{x^2}$

   D'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{1+\frac{1}{x^4}} - a) = 1 - a$

   Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\cos c.x}{x^2} = 0$ *(car $|1-\cos c.x| \leq 2$ fonction bornée et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$)*

   Alors, pour $a < 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et pour $a > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. *Si $a = 1$, calcul des valeurs de b et c,*

   f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en 0.

   On a : $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos c.x}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} \frac{(1+\cos c.x)(1-\cos c.x)}{x^2(1+\cos c.x)} = \lim\limits_{x\to0} c^2 (\frac{\sin c.x}{cx})^2 . \frac{1}{(1+\cos c.x)} = \frac{c^2}{2}$

   D'où $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1 - b + \frac{c^2}{2}$ et $f(0) = 0$.

   D'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3 \Leftrightarrow b = 3$.

   Alors, on tire $\frac{c^2}{2} = 2 \Leftrightarrow |c| = 2$

   Conclusion :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ |c| = 2 \end{cases}$$

Exercice 4. *(04 points) :*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = a$, $f(b) = b$ et soit $g : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ une fonction continue.

Montrons qu'il $\exists c \in [a,b]$ telle que $f(c) = g(c)$

Considérons la fonction h définie par $h(x) = f(x) - g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. h est continue sur $[a,b]$, car f et g sont continues sur $[a,b]$

De plus, on a :

$h(a) = f(a) - g(a) = a - g(a)$ et $h(b) = f(b) - g(b) = b - g(b)$.

Et, $a \leq g(x) \leq b$, $\forall x \in [a,b]$ car $g : [a,b] \to [a,b]$.

En particulier :

$$\begin{cases} a \leq g(a) \leq b \\ a \leq g(b) \leq b \end{cases}$$

Si $g(a) = a$ alors $g(a) = f(a)$ alors $c = a$ CQFD

Si $g(b) = b$ alors $g(b) = f(b)$ alors $c = b$ CQFD

Si $a \neq g(a)$ et $b \neq g(b)$ alors $a < g(a)$ et $g(b) < b \Leftrightarrow h(a) = a - g(a) < 0$ et $h(b) = b - g(b) > 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on aura :

$\exists c \in]a,b[$ telle que $h(c) = f(c) - g(c) = 0$

Conclusion

$$\exists c \in]a,b[\text{ telle que } f(c) = g(c)$$