Université A. Mira. Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I

01/03/2012
Durée : 02 H

Examen d'Analyse 1

Exercice 1. ***(07 pts)***

1) *Montrer que*

$$\forall x > 0 \ : \ \frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

En déduire d'abord que

$$\forall x > 0 \ : \ \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1},$$

puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ *où* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est la suite convergente donnée par*

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}, \ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

2) *On considère les suites réelles suivantes :*

$$U_1 = \frac{1}{4} \ et \ U_n = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}-\ln n, \ \forall n\geq 2.$$

$$V_n = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n, \ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont convergentes et qu'elles admettent la même limite, notée* l.

3) *Soit* $E=\{V_n, \ n\in\mathbb{N}^*\}$. *Déterminer* $\sup E$ *et* $\inf E$.

Exercice 2. ***(07 pts)***

Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si \ x\neq 0 \\ 0 & si \ x=0 \end{cases}$$

1) *Montrer que* f *est dérivable en* 0.

2) *Montrer que la fonction dérivée* f' *est dérivable en* 0.

3) *Généraliser les résultats précédents à l'ordre* n *quelconque en calculant* $f^{(n)}(0)$.

4) *En déduire le développement de Taylor avec reste de Lagrange de la fonction* f *en* 0 *à l'ordre* n.

Indication : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{x}}=0, \ \forall\alpha\in\mathbb{R}.$

Exercice 3. ***(06 pts)***

1) *Donner le développement limité d'ordre* 3 *au voisinage de* 0 *de la fonction réelle* g *donnée par*

$$g(x) = (\cos x)^{x.(cotg \ x)}$$

2) *En déduire* $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

– Bon courage –