Corrigé

Solution .1

1) *Soit $x>0$. On considère la fonction $f: t \mapsto \ln t$.*
La fonction f est continue sur $[x, x+1]$, dérivable sur $]x,\ x+1[$. D'après le théorème des accroissements finis, on a :

$$\exists c \in \,]x, x+1[\text{ tel que } f(x+1) - f(x) = f'(c),$$

ou encore

$$\exists c \in \,]x, x+1[: \ \ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c}.$$

Or

$$\ln(x+1) - \ln x = \ln \frac{x+1}{x} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

On a

$$0 < x < c < x+1 \Longrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

D'où

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}. \tag{1}$$

De (1), on a

$$\forall x > 0,\ x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1 < (x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

La fonction $x \mapsto e^x$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on déduit que

$$\forall x > 0,\ e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} < e < e^{(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

ou encore

$$\forall x > 0,\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

En particulier

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n < e \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \leq e.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n\left(1+\frac{1}{n}\right) > e \Longrightarrow a_n \geq \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \geq e$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = e$

2) $U_2 - U_1 = 1 - \ln 2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \ln 2 > 0$ *et*

$$\forall n \geq 2 : \ U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0 \ \text{(d'après (1))}.$$

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
D'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0 \ \text{(d'après (1))}.$$

Ainsi : $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est décroissante. De plus* $\forall n \geq 2,\ V_n - U_n = \dfrac{1}{n}$*, donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0.$
On conclut que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont adjacentes . Par conséquent, elles convergent vers la même limite* l.
3) $E = \{V_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$. *E non vide et borné , puisque* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente. Donc* $\sup E$ *et* $\inf E$ *existent.*
$(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *étant décroissante , on a* $\sup E = V_1 = 1$ *et* $\inf E = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l.$

Solution .2 ***1)*** *Montrons que* f *est dérivable en* 0. *On a*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{xe^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}}.x = 0\ \left(car\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0\right)$$

2) *On a :*

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0}2.\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0\ (car\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x} = 0,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}).$$

D'où f' *est dérivable en* 0 *et* $f''(0) = 0.$
3) *En dérivant successivement* $f(x)$ *pour* $x \neq 0$, *nous obtenons*

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},\ f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, ...,\ f^{(n)}(x) = Q_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

où $Q_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$ *est un polynôme de degré* $3n$ *suivant les puissances de* $\dfrac{1}{x}$.
Au point $x = 0$. *On a* $f'(0) = 0,\ f''(0) = 0, ..., f^{(n)}(0) = 0.$
Montrons par récurrence que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f^{(n)}(x) = \begin{cases} Q_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x\neq 0, \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

Supposons que

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} Q_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x\neq 0, \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

et montrons que

$$f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} Q_{3n+3}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x\neq 0, \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

On a

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x).$$

Si $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(Q_{3n}\left(\tfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' \\ &= \left(Q_{3n}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)'e^{-\frac{1}{x^2}} + Q_{3n}\left(\tfrac{1}{x}\right)\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' \\ &= \underbrace{-\frac{1}{x^2}\left(Q'_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)\right)e^{-\frac{1}{x^2}} + Q_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}_{Q_{3n+3}e^{-\frac{1}{x^2}}} \end{aligned}$$

Si $x = 0$

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{Q_{3n+3}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0 \ (car \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x} = 0,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\ )$$

D'où $f^{(n)}(0) = 0,\ \forall n\in\mathbb{N}.$

4) Puisque $f \in C^n(\mathbb{R}^*)$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0 = f^{(n)}(0)$, *donc* $f\in C^n(\mathbb{R})$, $\forall n\in\mathbb{N}$ *et* $f(0) = f'(0) = ... = f^{(n)}(0) = 0$ *alors le développement de Taylor de* f *en* 0 *est:*

$$f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x),\ \forall x\in\mathbb{R} \text{ avec } 0<\theta<1$$

Solution .3 *1) On écrit la fonction* g *sous la forme* $g(x) = e^{x.\cot x.\ln(\cos x)}$.

a) *On cherche le* $DL_3(0)$ *de la fonction* $x\mapsto x.\cot g\ x.\ln(\cos x)$. *Il y a plusieurs méthodes pour trouver le* $Dl_3(0)$ *de la fonction* $x\mapsto x.\cot g\ x$

<u>1ère méthode</u>

Au voisinage de 0, *on a :*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right) \text{ et } \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).$$

D'où

$$x\cot g\ x = \frac{x\cos x}{\sin x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{2} + o\left(x^4\right)}{x - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)} = \frac{1 - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)}{1 - \dfrac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)} = 1 - \frac{x^2}{3} + o\left(x^3\right).$$

<u>2ème méthode</u>

$$x\cot g\ x = \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1 - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)}{1 - \dfrac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)} = 1 - \frac{x^2}{3} + o\left(x^3\right).$$

b) *On cherche le* $Dl_3(0)$ *de la fonction* $x\mapsto\ln(\cos x)$.

De même qu'au voisinage de 0, *on a :*

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right).$$

Donc

$$\ln(\cos x) = \ln((\cos x - 1) + 1) = \ln\left(\left(-\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right) + 1\right) = -\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$$

D'où

$$x.\cot gx.\ln(\cos x) = \left(1 - \frac{x^2}{3} + o\left(x^3\right)\right)\left(-\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right) = -\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right).$$

Par suite, puisque

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + o\left(u^3\right)$$

alors

$$g(x) = e^{-\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)} = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$$

2) On a :

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right) = 1.$$