Université A. Mira-Béjaia
Faculte des Sciences et des Sciences de l'Ingénieur
Département MIAS

Septembre 2006

Rattrapage de l'Examen d'Analyse 1

Exercice 1 (06 points)

Etudier la continuité, la dérivabilité et la continuité de la dérivée pour les applications suivantes :

1. $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$
2. $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$
3. $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

Exercice 2 (06 points)

Soit $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[-\{0\}$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Determiner un DL de f en 0 à l'ordre 2.
3. Etudier la dérivabilité du prolongement de f

Exercice 3 (08 points)

Soient $\alpha \geq 0$ et $S_n(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha}$.
Montrer que :

1. $(S_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite divergente.
2. $\forall \alpha \in [0, 1], (S_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.
3. $\forall \alpha > 0, \exists x > 0 : \frac{\alpha}{(x+1)^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{(x+1)^\alpha} \leq \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$
   Ind : Utiliser le T.A.F.
4. En remplaçant x par $1, 2, 3, ..., n$ et en sommant les inégalités obtenues, montrer que $(S_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour $\alpha > 1$.