UNIVERSITÉ A. MIRA-BÉJAIA
FACULTE DES SCIENCES

DÉPARTEMENT MIAS

MARS 2006

Examen d'Analyse 1

Exercice 1: Question de cours : (02 points)

Quelle est la différence entre la formule de Taylor avec le reste de Lagrange (ou de Cauchy) et la formule de Taylor avec le reste de Young.

Exercice 2: (03 points)

(1) Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$, $r.x \notin \mathbb{Q}$.
(2) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
(3) En déduire, entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Exercice 3: (06 points)

Soit une foction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - 5}$

(1) Ecrire un DL à l'ordre 2, au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$.
(2) En déduire :
- $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$
- Léquation de l'asymptôte à la courbe représentative de f.
- La position de la courbe par rapport à son asymtôte au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

Exercice 4: (06 points)

(1) Comment la fonction $f : x \longmapsto Arc\tan(x)$ est t - elle définie? montrer qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$.
(2) Montrer que la fonction $g : x \longmapsto Arc\tan(\frac{1}{1+x+x^2})$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée g'
(3) Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$Arc\tan(x+1) - Arc\tan(x) = Arc\tan(\frac{1}{1+x+x^2})$$

(4) Soit la suite $(U_n)_{n>1}$ définie par $U_n = Arc\tan(\frac{1}{1+n+n^2})$
- Donner une expression simple de $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$
- Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 5: (03 points)

(1) $\forall \alpha > 0$ et $\forall x > 0$ exprimer $e^{\alpha x} - e^{\alpha x/2}$ en appliquant le théorème des accroissements finis.
(2) En déduire que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x} = +\infty$