Université A. Mira-Béjaia
Faculté des Sciences
Département MIAS

Mars 2006

Examen d'Analyse 1 : Le Corrigé.

Exercice 1 Question de cours : (02 points)

La formule de Taylor avec le reste de Lagrange (ou de Cauchy) a un caractère global (étude de f sur un intervalle) alors que la formule de Taylor avec le reste de Young est d'un caractère local (étude de f au voisinage d'un point x_0)

Exercice 2 (03 points)

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$, $r.x \notin \mathbb{Q}$.

Par absurde, $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$, supposons que $r + x \in \mathbb{Q}$, alors $\exists (p', q') \in \mathbb{N}\text{x}\mathbb{N}^*$ tel que $r + x = \frac{p'}{q'} \Longrightarrow x = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{p'q-pq'}{q'q} \in \mathbb{Q}$, contradiction $x \notin \mathbb{Q}$ donc $r + x \notin \mathbb{Q}$.

De même, on suppose que $rx \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \exists (p', q') \in \mathbb{N}\text{x}\mathbb{N}^*$ tel que $r.x = \frac{p'}{q'} \Longrightarrow x = \frac{p'}{q'}\frac{q}{p} = \frac{p'q}{q'p}\mathbb{Q}$, contradiction $x \notin \mathbb{Q}$ donc $r.x \notin \mathbb{Q}$.

2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Par absurde, supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \exists (p, q) \in \mathbb{N} \text{ x } \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$
(supposons que p et q sont premiers entre eux, c'est à dire que $\frac{p}{q}$ est irréductible)
D'où $2q^2 = p^2 \Longrightarrow p^2$ pair donc p est pair, il s'écrit $p = 2p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$
D'où $p^2 = 4.(p')^2 \Longrightarrow q^2 = 2.(p')^2, q^2$ pair donc q est pair : $q = 2.q'$ avec $q' \in \mathbb{N}, p$ et q pairs alors la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible (contradiction) donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3. Entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Soient $a, b \in \mathbb{Q}$, avec $a < b$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.(question 2.) et du moment que $\mathbb{R}$ est archimidien alors $\exists n \in \mathbb{N} : n > \sqrt{2}$

On pose $x = a + \frac{\sqrt{2}}{n}(b - a)$, on a bien $x \in]a, b[$ et de plus $\sqrt{2}\left(\frac{b-a}{n}\right) \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow x \notin \mathbb{Q}$ (question 1.)
D'ou : $\forall (a, b) \in \mathbb{Q}^2, \exists x \notin \mathbb{Q} : a < x < b$

Exercice 3 (06 points)

Soit une foction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - 5}$

1. $\frac{f(x)}{x} = \sqrt[3]{1 + 6\frac{1}{x} - 5\frac{1}{x^3}} = \left(1 + \left(6\frac{1}{x} - 5\frac{1}{x^3}\right)\right)^{\frac{1}{3}}$
$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{3}\left(6\frac{1}{x} - 5\frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{9}\left(6\frac{1}{x} - 5\frac{1}{x^3}\right)^2 + o\left(6\frac{1}{x} - 5\frac{1}{x^3}\right)^2$
Le $DL_2(\pm\infty)$ de $\frac{f(x)}{x}$ est $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
2. On déduit que :

– $\lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty} \left(x+2-\frac{4}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \pm\infty$
$x\longrightarrow\pm\infty$
– $\lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty} [f(x)-(x+2)] = \lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty} \left[-\frac{4}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$
La droite d'équation $y = x+2$ est une asymptôte à la courbe
– Position de la courbe par rapport à son asymtôte au voisinage de $\pm\infty$
$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} [f(x)-(x+2)] = 0^-$ la courbe est au dessous de l'asymptôte
$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} [f(x)-(x+2)] = 0^+$la courbe est au dessus de l'asymptôte

Exercice 4 (06 points)

1. Comment la fonction $f : x \longmapsto Arc\tan(x)$ est t - elle définie ?
   La fonction $h : \left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = tgx = \tan x$ étant continue et strictement croissante donc bijective sur $\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$ $(h'(x) = 1+\tan^2 x > 0)$ admet une fonction réciproque $h^{-1} \equiv f : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$ appellée fonction arc tangente qui est continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, notée arctan. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, y = \arctan x \Longleftrightarrow x = \tan y, \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$
   La dérivée : $(\arctan x)' = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$
2. La fonction $g : x \longmapsto Arc\tan(\frac{1}{1+x+x^2})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonctions $u(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$(avec $1+x+x^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$) et de $f(x) = Arc\tan(x)$ dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivée :
   $g'(x) = (fou)'(x) = u'(x)\, f'[u(x)] = -\frac{2x+1}{1+(1+x+x^2)^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$
3. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$:
   $$Arc\tan(x+1) - Arc\tan(x) = Arc\tan(\frac{1}{1+x+x^2})$$
   1° méthode : On a : $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$
   En posant $a = Arc\tan(x+1)$ et $b = Arc\tan(x)$,
   On aura : $\tan[Arc\tan(x+1) - Arc\tan(x)] = \frac{(x+1)-x}{1+(x+1)x} = \frac{1}{1+x+x^2}$
   De plus, le TAF à la fonction $Arc\tan$ sur $[x, x+1]$, $\exists c \in]x, x+1[$: $Arc\tan(x+1) - Arc\tan(x) = 1\frac{1}{1+c^2}$ Où : $0 < 1\frac{1}{1+c^2} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$
   Alors $Arc\tan(x+1) - Arc\tan(x) = Arc\tan(\frac{1}{1+x+x^2})$
   2° méthode : La fonction $x \longmapsto Arc\tan(x+1) - Arc\tan(x) - Arc\tan(\frac{1}{1+x+x^2})$ est dérivable de dérivée nulle, donc c'est une fonction constante, pour $x = 0$ elle est nulle donc c'est une constante nulle.
   c'est à dire $Arc\tan(x+1) - Arc\tan(x) - Arc\tan(\frac{1}{1+x+x^2}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
4. Soit la suite $(U_n)_{n>1}$ définie par $U_n = Arc\tan(\frac{1}{1+n+n^2})$

– Dans la relation 3. pour $x = n$, on obtient :
  $S_n = Arc\tan(n+1) - Arc\tan(1) = Arc\tan(n+1) - \frac{\pi}{4}$
– $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left(Arc\tan(n+1) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

Exercice 5 (03 points)

1. $\forall \alpha > 0$ et $\forall x > 0$ exprimer $e^{\alpha x} - e^{\alpha x/2}$
   Sur $\left[\frac{x}{2}, x\right]$ le TAF pour $e^{\alpha x}$: $\forall x > 0, \exists c \in \left]\frac{x}{2}, x\right[$: $e^{\alpha x} - e^{\alpha x/2} = \frac{x}{2}\alpha e^{\alpha c}$
2. On déduit que $e^{\alpha x} - e^{\alpha x/2} \geq \frac{x}{2}\alpha e^{\alpha x/2} \Longrightarrow \frac{e^{\alpha x}}{x} \geq \frac{1}{2}\alpha e^{\alpha x/2}$
   comme $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} e^{\alpha x/2} = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x} = +\infty$