

Exercice 1:

1) Mots de longueur  $\leq 4$ :

$\varepsilon$ ,

$aa, bb$

$aaaa, aabb, abba, abab, bbbb, bbaa, baab, baba$ .

2) Soit  $N$  = nombre de mots de longueur  $2n$ ; le nombre de mots ayant  $2p$  lettres "a" parmi les  $2n$  est  $C_{2n}^{2p}$ .

$$\text{Donc } N = \sum_{p=0}^n C_{2n}^{2p} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n}$$

$$\text{On a: } (1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + C_{2n}^3 x^3 + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}$$

en faisant le remplacement de  $x$  par  $+1$  puis  $-1$ , on aura:

$$2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n}$$

$$0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n}$$

En faisant la somme, on aura:  $2^{2n} = 2.N$ ; d'où  $N = 2^{2n-1}$

3) Parmi les mots de longueur  $2n$ , la moitié commence par "a" et l'autre moitié par "b". Donc le nombre en question est  $2^{2n-2}$ .

$$4) G = (\{a, b\}, \{S, A, B, C\}, P, S)$$

$$P: S \rightarrow aA \mid bB \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow aS \mid bC$$

$$B \rightarrow bS \mid aC$$

$$C \rightarrow bA \mid aB$$

Exercice 2:

a)  $G_1 = (\{a\}, \{S\}, \{S \rightarrow aaS \mid a\}, S)$

b)  $G_2 = (\{p, (, ), \neg, \wedge\}, \{S\}, \{S \rightarrow (S) \mid \neg S \mid S \wedge S \mid P\}, S)$

c)  $G_3 = (\{a, b\}, \{S, A, B, C, D\}, P_3, S)$

$P_3:$   $S \rightarrow DAC$

$A \rightarrow aAbB \mid \varepsilon$

$Bb \rightarrow bB$

$BC \rightarrow aCb$

$Ba \rightarrow aB$

$Da \rightarrow aD$

$Db \rightarrow bD$

$DC \rightarrow \varepsilon$

Exercice 3:

1-1)  $L(G_1) = \{ba\} \cup (\{a^n / n \geq 1\} \cdot \{ba, baa\})$

1-2)  $G'_1 = (\{a, b\}, \{S, A\}, \{S \rightarrow ba \mid A; A \rightarrow aA \mid aba \mid abaa\}, S)$

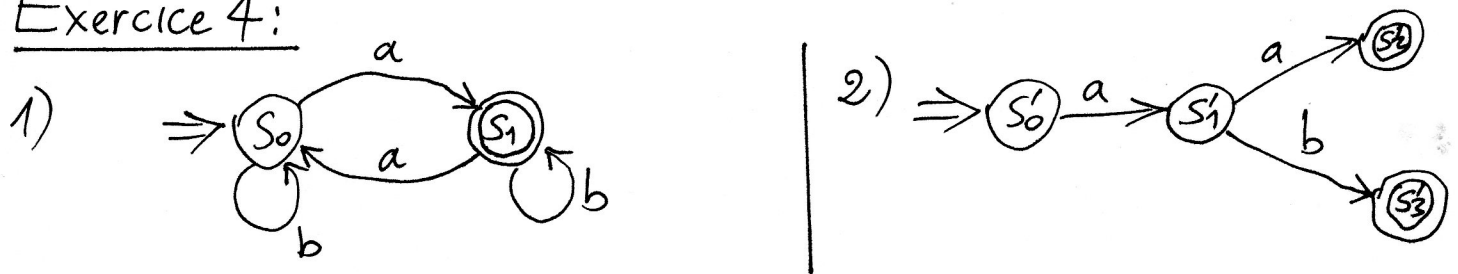
2-1)  $L(G_2) = \{a^n b^i c^j / i+j=n\}$

2-2)  $G'_2 = (\{a, b, c\}, \{S, A\}, P'_2, S)$

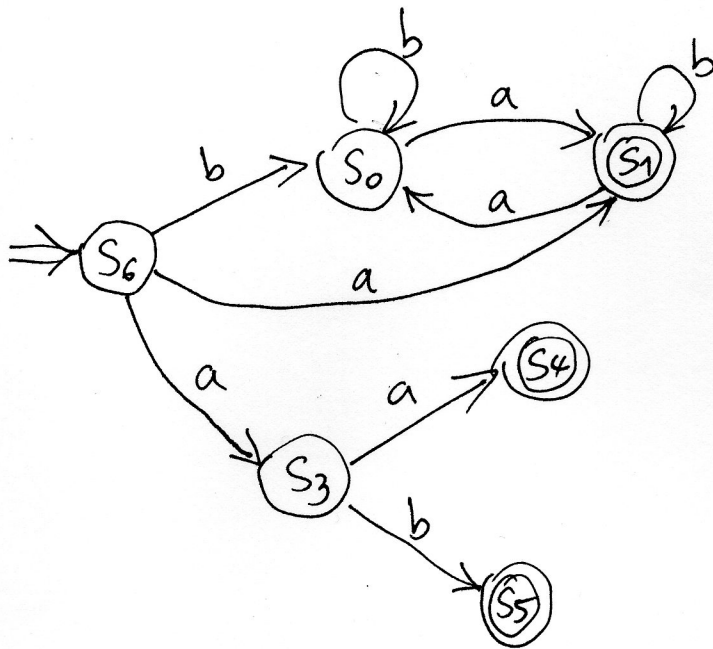
$P'_2:$   $S \rightarrow aSc \mid A$

$A \rightarrow aAb \mid \varepsilon$

Exercice 4:



3) Union de  $L_1$  et  $L_2$ : après simplification on trouve:



4) Table de transition de l'automate déterministe:

	a	b
$\langle S_6 \rangle = q_0$	$\langle S_1, S_3 \rangle$	$\langle S_0 \rangle$
$\langle S_1, S_3 \rangle = q_1 (F)$	$\langle S_0, S_4 \rangle$	$\langle S_1 \rangle$
$\langle S_0 \rangle = q_2$	$\langle S_1 \rangle$	$\langle S_0 \rangle$
$\langle S_0, S_4 \rangle = q_3 (F)$	$\langle S_1 \rangle$	$\langle S_0 \rangle$
$\langle S_1 \rangle = q_4 (F)$	$\langle S_0 \rangle$	$\langle S_1 \rangle$

Automate déterministe:

