1° année MI — **Examen d'Analyse 1** — 28 janvier 2014

Durée: 2 heure — **Calculatrice non autorisée**

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements influent sur la notation

Exercice 1 (06 points)
Soient $a,b,u_1,v_1 \in \mathbb{R}$, ou $u_1 < v_1$ et $0 < b < a$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{au_n + bv_n}{a+b} \\ v_{n+1} &= \dfrac{av_n + bu_n}{a+b} \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < v_n$,

2) Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

3) Exprimer $v_n - u_n$ en fonction de $v_1 - u_1$,
déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

4) Exprimer $v_n + u_n$ en fonction de $v_1 + u_1$,
déduire la limite de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2 (06 points)
Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2) Étudier la dérivable de f sur $\mathbb{R}$.

3) La fonction f est - elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

Exercice 3 (05 points)

1) Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que

$$\forall x > 0 \ , \ \frac{2}{(x+1)^3} < \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} < \frac{2}{x^3}$$

2) Déduire la limite suivante $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2} \right) e^x$.

Exercice 4 (03 points)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. vérifiant :

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{1}{n+1}$$

En appliquant le théorème de Rolle, montrer que l'équation

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} = x^n$$

possède une solution dans]0,1[

Bon courage