Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou
Faculté de génie électrique et informatique
Département d'informatique

Année universitaire : 2014/2015
$2^{ième}$ année licence – Informatique
module : Théorie des langages

Epreuve de Moyenne Durée

le 03/02/2015 – Durée 1h 30mn – documents non autorisés

EXERCICE 1 : (*4,5 pts*)

Une girouette est un instrument indiquant le sens du vent. On considère qu'il y a quatre directions possibles : est, sud, ouest et nord. On suppose aussi que l'aiguille de la girouette, indiquant le sens, tourne d'un quart de cercle à la fois ; soit dans le sens des aiguilles d'une montre (*sens **a***), soit dans le sens opposé (*sens **b***). On supposera que la direction initiale indiquée par la girouette est le sud.

Soit L = ensemble des mouvements de l'aiguille qui se terminent à la position de départ.

1) Les mots suivants sont ils dans L ? il s'agit de : *abbab, babbaa, aaabaa, bbaba*. ***(2 pts)***
2) Caractériser le langage L. ***(1 pt)***
3) Trouver une grammaire régulière qui génère L. ***(1,5 pts)***

EXERCICE 2 : (*6 pts*)

Trouver :

1) une grammaire de type 3 pour le langage : $L_1 = \{ a^n.b^{2m} \ / \ n \geq 1, m \geq 0 \}$; ***(1,5 pts)***
2) une grammaire de type 2 pour : $L_2 = \{ a^n b^m \ / \ 0 \leq m \leq n/2 \}$; ***(1,5 pts)***
3) une grammaire de type 1 pour : $L_3 = \{ a^{2^n} \ / \ n \geq 0 \}$; ***(1,5 pts)***
4) une grammaire de type 0 pour : $L_4 = \{ w \in \{a, b, c, d\}^* \ / \ w = a^n b^m c^i d^j$ et $n+m = i+j \}$. ***(1,5 pts)***

EXERCICE 3 : (*5 pts*)

Soit L = ensemble des mots de $\{0, 1\}^*$ représentants les nombres divisibles par 5 (dans le système de numération binaire naturel).

1) Construire un automate d'états finis simple qui accepte L. ***(4 pts)***
2) Donner un automate d'états finis simple qui accepte le complémentaire de L. ***(1 pt)***

EXERCICE 4 : (*4,5 pts*)

1) En utilisant les dérivées, vérifier si les langages suivants sont réguliers :
   1-a) $L_1 = \{ a^{2n}.b^{2m+1} \ / \ n \geq 0, m \geq 0 \}$; ***(1,5 pts)***
   1-b) $L_2 = \{ w \in \{a, b\}^* \ /$ w s'écrit comme $w = u.u$; où $u \in \{a, b\}^* \}$. ***(1,5 pts)***
2) Montrer que toute grammaire régulière à gauche est équivalente à une grammaire régulière à droite. ***(1,5 pts)***

Bon courage !

Bref corrigé : (EMD de ThL – L2 informatique – 2014/2015)

EX.**1** :

1) Les mots suivants sont dans L : *babbaa*, *aaabaa*

les mots qui ne sont pas dans L : *abbab, bbaba*

2) L peut être caractérisé comme suit : $L = \{ w \in \{a, b\}^* \,/\, ||w|_a - |w|_b| \equiv 0\ [4] \}$, ou :

$L = \{ w \in \{a, b\}^* \,/\, \exists k$ tel que $|w|_a = |w|_b+4k$ ou $|w|_b = |w|_a+4k \}$

3) Une grammaire régulière pour L : $G = (\{a, b\}, \{S, W, N, E\}, S, P)$

P : $S \to aW \mid bE \mid \varepsilon$

$W \to aN \mid bS$

$N \to aE \mid bW$

$E \to aS \mid bN$

EX.**2** :

1) Une grammaire de type 3 pour L_1 : $G_1 = (\{a, b\}, \{S, A\}, S, P_1)$

P_1 : $S \to aS \mid aA$; $A \to bbA \mid \varepsilon$

2) Une grammaire de type 2 pour L_2 : $G_2 = (\{a, b\}, \{S\}, S, P_2)$

P_2 : $S \to aS \mid aaSb \mid \varepsilon$

3) Une grammaire de type 1 pour L_3 : $G_3 = (\{a\}, \{S, A, B, C, D\}, S, P_3)$

P_3 : $S \to BCD \mid aa \mid a$

$C \to AC \mid aa$

$Aaa \to aaAa$

$AaD \to aaD$

$Baaa \to aaBaa$

$BaaD \to aaaa$

4) Une grammaire de type 0 pour L_4 : $G_4 = (\{a, b, c, d\}, \{S, A, B, C\}, S, P_4)$

P_4 : $S \to ABC$

$B \to bBc \mid \varepsilon$

$Ab \to aA$

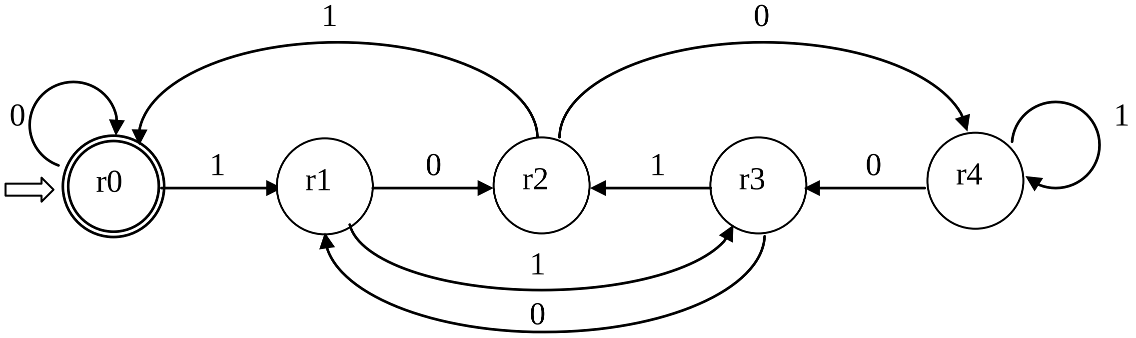
$A \to \varepsilon$

$cC \to Cd$

$C \to \varepsilon$

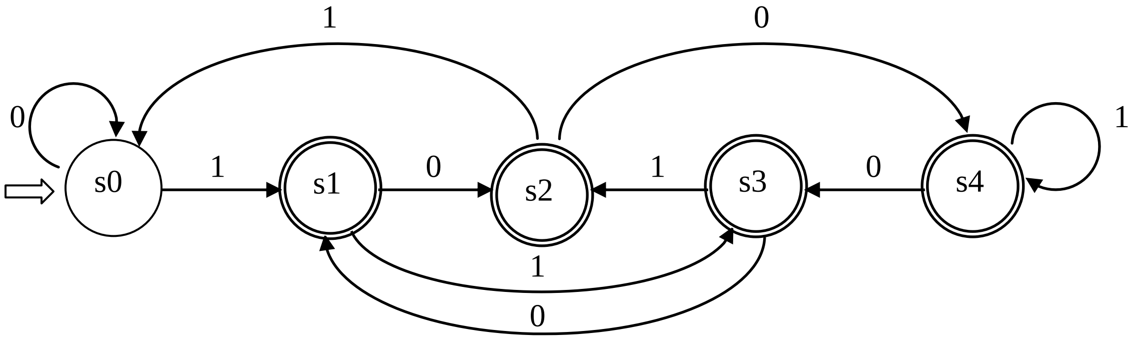
EX. **3** :

1) Automate pour L :



2) Automate du complémentaire de L :

l'automate de L, donné en 1), étant déterministe et complet, pour obtenir l'automate du complémentaire de L, il suffit d'inverser les états finaux et non finaux dans l'automate de L ; on obtient :



EX. **4** :

1)

1-a) Soit $S0 = L_1 = \{ a^{2n}.b^{2m+1} / n \geq 0, m \geq 0 \}$. Ce langage est régulier, car ses dérivées par rapport aux mots de {a, b}* sont finies :

$S0 \| a = \{ a^{2n-1}.b^{2m+1} / n \geq 1, m \geq 0 \} = S1$

$S0 \| b = \{ b^{2m} / m \geq 0 \} = S2$

$S1 \| a = S0$

$S1 \| b = ø$

$S2 \| a = ø$

$S2 \| b = \{ b^{2m-1} / m \geq 1 \} = S3$

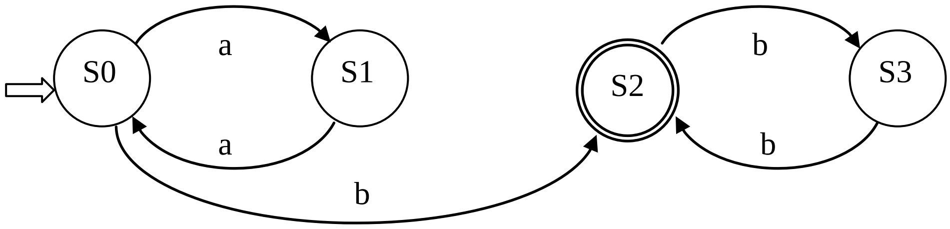
$S3 \| a = ø$

$S3 \| b = S2$

Après S3, on n'obtient plus de nouveaux états.

Remarque : l'automate d'états finis qui accepte L_1 est le suivant :

(S2 est le seul état final car il contient ε)



1-b) Le langage $L_2 = \{ u.u \,/\, u \in \{a, b\}^* \}$ n'est pas régulier.

Démonstration par l'absurde : supposons que L_2 est régulier, il existe alors deux mots w_1 et w_2 tels que : $w_1 \neq w_2$ et $L_2 \parallel w_1 = L_2 \parallel w_2$.

On a :

$L_2 \parallel w_1 = \{ v.w_1.v / v \in \{a, b\}^* \}$ et $L_2 \parallel w_2 = \{ v.w_2.v / v \in \{a, b\}^* \}$

et donc : $w_2.(L_2 \parallel w_1) = w_2.(L_2 \parallel w_2) = \{ w_2.v.w_1.v \,/\, v \in \{a, b\}^* \} = L_2$

d'où : $w_2.v = w_1.v$ et ainsi $w_1 = w_2$: contradiction.

2) Soit $g = < \pi, N, S, P >$ une grammaire régulière à gauche. Construisons intuitivement une grammaire régulière à droite $g' = < \pi, N', S', P' >$ comme suit :

$N' = N \cup \{S'\}$ $(S' \notin N)$, P' est tel que :

- $(A \rightarrow B\, w \in P)$ où $(A, B \in N$ et $w \in \pi^*) \Rightarrow (B \rightarrow w\, A) \in P'$;
- $(A \rightarrow w \in P)$ où $(A \in N$ et $w \in \pi^*) \Rightarrow (S' \rightarrow w\, A) \in P'$;
- $(S \rightarrow \varepsilon) \in P'$ (S est l'axiome de g).

Ainsi, $\alpha = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n \in L(g)$ **ssi** il existe une dérivation dans g de la forme :

$S \vdash A_n\, w_n \vdash A_{n-1}\, w_{n-1}\, w_n \vdash \ldots \vdash A_2\, w_2\ldots w_{n-1}\, w_n \vdash w_1\, w_2\ldots w_{n-1}\, w_n$ (*)

(ce qui est possible grâce aux productions suivantes dans g : $S \rightarrow A_n\, w_n$; $A_n \rightarrow A_{n-1}\, w_{n-1}$; … ; $A_3 \rightarrow A_2\, w_2$; $A_2 \rightarrow w_1$) $\Leftrightarrow$ il existe des productions dans g' de la forme $S' \rightarrow w_1\, A_2$; $A_2 \rightarrow w_2\, A_3$; … ; $A_{n-1} \rightarrow w_{n-1}\, A_n$; $A_n \rightarrow w_n\, S$; $S \rightarrow \varepsilon$ $\Leftrightarrow$ il existe une dérivation dans g' de la forme :

$S' \vdash w_1\, A_2 \vdash w_1\, w_2\, A_3 \vdash \ldots \vdash w_1\, w_2\ldots w_{n-1}\, A_n \vdash w_1\, w_2\ldots w_{n-1}\, w_n\, S \vdash w_1\, w_2\ldots w_{n-1}\, w_n$

$\Leftrightarrow w = w_1\, w_2\ldots w_{n-1}\, w_n \in L(g')$. C.Q.F.D.

--------------------- Fin du corrigé de l'EMD de ThL – L2 informatique – 2014/2015 ---------------------