UBMA - Faculté des sciences d'ingénieur
Département d'informatique - Deuxième année LMD

Date : juin 2010
Durée : 1:45h

Examen : théorie des langages

Exercice 1 (3.5 pts) : Les automates à pile

Soit $(X = \{a, b, c\}, \Pi = \{A, \triangleright\}, Q = \{0, 1, 2, 3\}, \text{initial} = 0, F = \{3\}, \delta)$ un automate à pile tel que δ est donnée par :

$$\begin{array}{lll} \delta(0, a, \triangleright) = (1, A\triangleright) & \delta(0, c, \triangleright) = (3, \triangleright) & \delta(2, b, A) = (2, \varepsilon) \\ \delta(0, a, A) = (1, AA) & \delta(0, c, A) = (2, \varepsilon) & \delta(2, \varepsilon, \triangleright) = (3, \triangleright) \\ \delta(1, b, A) = (0, A) & \delta(2, a, A) = (2, \varepsilon) & \end{array}$$

1. Dites si les mots **abca**, **abcab** et **acb** sont reconnus par cet automate. Justifiez en donnant l'enchaînement des états.
2. Quel est le langage L reconnu par cet automate ? Expliquez.

Exercice 2 (4.5 pts) : Les expressions régulières

1. Donnez une expression régulière à chacun des langages suivants :
   (a) tous les mots sur $\{a, b, c\}$ ne contenant pas le facteur a ;
   (b) tous les mots sur $\{a, b, c\}$ ne contenant pas le facteur aa ;
   (c) tous les mots sur $\{a, b, c\}$ ne contenant pas le facteur aaa ;
2. Soit i une constante entière ($i \geqslant 1$) :
   (a) en vous inspirant des réponses précédentes, donnez l'expression régulière de tous les mots sur $\{a, b, c\}$ ne contenant pas le facteur a^i, justifiez ;
   (b) donnez alors l'expression régulière de tous les mots sur $\{a, b, c\}$ ne contenant pas le facteur a^{1000}.

Exercice 3 (5 pts) : Les grammaires et les langages réguliers

Soit la grammaire $(\{x, y\}, \{S\}, S, \{S \to SyS|x\})$.

1. Quel est le type de cette grammaire ? Justifiez.
2. Donnez deux mots générés par cette grammaire (donnez les chaînes de dérivation).
3. Quel est le langage généré par cette grammaire ? Montrez que ce langage est régulier.
4. Donnez alors une grammaire régulière générant ce langage.

Exercice 4 (7 pts) : Propriétés des AEF et les langages réguliers

Soient les langages suivants : $L_1 = (ab^*c)^*$ et $L_2 = (abc)^*$.

1. Le langage L_2 est inclus dans la langage L_1, dites pourquoi ?
2. L'objectif de cette partie est de trouver une procédure permettant de décider si une langage L' est inclus dans un autre langage L.
   (a) Si $L' \subseteq L$, que peut-on dire de L' et $\overline{L}$? Justifiez.
   (b) Rappelez comment obtenir l'automate du langage $\overline{L}$ à partir de celui de L et comment obtenir l'automate reconnaissant le langage $L' \cap \overline{L}$
   (c) Si $L' \subseteq L$, quelle est la particularité de l'automate reconnaissant $L' \cap \overline{L}$? Expliquez.
   (d) Donnez alors une procédure générale permettant de montrer qu'un langage L' est inclus dans un autre langage L.
   (e) Appliquez votre proposition pour montrer que $L_2 \subseteq L_1$.

CORRIGE-TYPE DE L'EXAMEN DE TL (JUIN 2010)

EXO 1 :

1- le mot abca
(0,a,▷)→(1,b,A▷)→(0,c,A▷) → (2,a,▷), plus aucune transition possible. Le mot est rejeté car il n'a pas été entièrement lu.

- le mot abcab
(0,a,▷)→(1,b,A▷)→(0,c,A▷) → (2,a,▷), plus aucune transition possible. Le mot est rejeté car il n'a pas été entièrement lu.

- le mot acb
(0,a,▷)→(1,c,A▷), plus aucune transition possible. Le mot est rejeté car il n'a pas été entièrement lu.

2- Le langage reconnu est $\{(ab)^n w \mid w \in (a|b)^* \text{ et } |w|=n-1\}+\{c\}$

EXO2 :

1-

a. (b|c)*
b. (a|ε)((b|c) (a|ε))*
c. (a|ε)(a|ε)((b|c) (a|ε)(a|ε))*

2-

a. **Un mot qui ne contient pas le facteur a^i ne doit pas avoir une séquence de a de plus de i symbole. Les séquences de a ne peuvent alors avoir de longueur qu'entre 0 et i-1, ce qui donne l'expression régulière suivante :** $(a|\varepsilon)^{i-1}((b|c)(a|\varepsilon)^{i-1})^*$
b. $(a|\varepsilon)^{999}((b|c)(a|\varepsilon)^{999})^*$

EXO3 :

1- La grammaire est hors-contexte car elle comporte la règle S→SyS qui est de type 2 (voir le cours pour la forme de ces règles) et la règle S→x qui est de type 3.

2- Deux mots générés : x, xyx
S→x
S→SyS→xyS→xyx

3- Le langage reconnu est $\{x(yx)^n \mid n>=0\}$.
Il peut être représenté par l'expression régulière x(yx)*, il est donc régulier.

3- Une grammaire possible est ({x,y},{S,T},S,{S→xT, T→yxT|ε})

EXO 4 :

1- Le langage L2 est inclus dans le langage L1 car dans l'expression régulière de L1, on b* qui correspond à 0 ou plusieurs b. Il peut donc correspondre à un seul b ce qui donne l'expression régulière de L2.

2-

a) On peut dire que $L' \cap \overline{L} = \varnothing$ car si un mot appartient à L' il appartient également à L, donc, il n'appartient pas à $\overline{L}$. De même, si mot appartient à $\overline{L}$, il n'appartient pas à L, donc, il n'appartient pas non plus à L' puisque L' ne peut pas contenir un élément qui ne se trouve pas dans L.

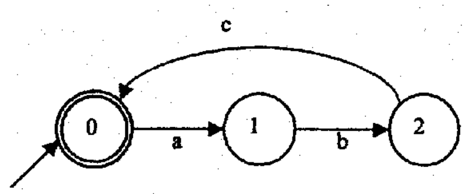
b) Voir le cours.

c) Si L' est inclus dans L, alors $L' \cap \overline{L} = \varnothing$ ce qui signifie que l'automate reconnaissant $L' \cap \overline{L}$ (que l'on construit par le produit de l'automate de L' et celui de $\overline{L}$) ne reconnaît aucun mot. Il ne contient alors aucun état final accessible.
La particularité de l'automate reconnaissant $L' \cap \overline{L}$: tous les états finaux sont inaccessibles.

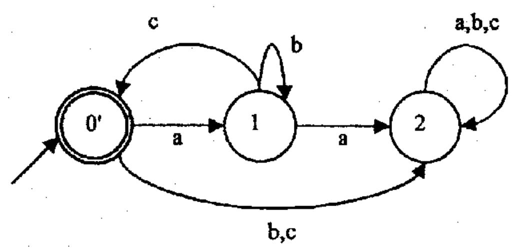
d) Pour vérifier que L' est inclus dans L, il suffit de construire l'automate de L puis déduire celui de $\overline{L}$ puis construire l'automate de L', faire le produit des deux derniers automates. Si tous les états finaux de l'automate résultant sont inaccessibles, alors L' est inclus dans L, sinon il ne l'est pas.

e)

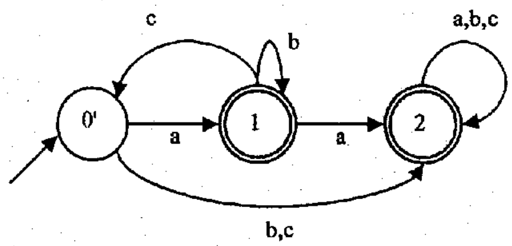
L'automate de L2



L'automate de L1 (complet)



L'automate du langage complémentaire de L1



Faire le produit :

Etat	a	b	c	Accessible
(0,0')	(1,1')	-	-	Oui
(0,1')	(1,2')	-	-	
(0,2')	(1,2')	-	-	
(1,0')	-	(2,1')	-	
(1,1')	-	(2,1')	-	Oui
(1,2')	-	(2,1')	-	
(2,0')	-	-	(0,2')	
(2,1')	-	-	(0,0')	Oui
(2,2')	-	-	(0,2')	

Finaux={(0,1'),(0,2')}
Initial=(0,0')

Tous les états de l'automate produit sont inaccessibles, on conclut alors que L2 est inclus dans L1.